

Collection«Pilote»

MATHEMATIQUES

Algèbre & Géométrie

Section SCIENCES EXPERIMENTALES

MATHEMATIQUES

Rappels de cours

Recueil d'exercices corrigés

Extraits de devoirs corrigés

Elaboré par :

Lamloumi Maâmmar

Cherif Fadhel

3ème année

TOME1

INTRODUCTION

Ce manuel est destiné aux élèves de 3ème année secondaire **section sciences expérimentales**, il fait partie de la « **Collection Pilote** ».

Ce livre comporte :

- Des résumés de cours complets.
- Des QCM qui permettent à l'élève de faire son auto-évaluation.
- Des Vrai / Faux qui permettent l'apprentissage progressif des règles logiques.
- Des lectures graphiques.
- Des exercices et des problèmes permettant aux élèves d'assimiler le cours, d'approfondir leurs compréhensions des concepts mathématiques, d'apprendre des techniques et des astuces pour la résolution des problèmes. Ils sont organisés par ordre croissant de difficultés .
- Des devoirs de contrôle et de synthèse :En utilisant des procédés diversifiés de genre QCM, Vrai / Faux , tableaux à remplir, lectures graphiques, exercices intégratifs.
- ce livre permet aux élèves de viser la mention et une bonne préparation pour le bac et les grandes écoles supérieures (facultés de Mathématiques, circuit préparatoire, polytechniques, etc..........)

Nous tenons à remercier vivement : nos familles pour leurs patience et monsieurs
Sami Aouaoui, nizar anter , Zouhair Jaouadi et rabeh gharbi pour leurs remarques et critiques.

Sommaire

RESUME DU COURS

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- La fonction f est croissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \leq f(b)$.
- La fonction f est décroissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \geq f(b)$.
- La fonction f est constante sur I si pour tous réels a et b de I , $f(a) = f(b)$. Une fonction est dite monotone sur un intervalle I lorsqu'elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

Théorème : Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
On dit que f est une fonction paire si pour tous x appartenant à D, - x appartient à D et $f(-x) = f(x)$
La fonction f est paire , si et seulement si , sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
On dit que f est une fonction impaire si pour tout x appartenant à D, -x appartient à D et $f(-x) = -f(x)$.
La fonction f est impaire, si et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble E et (C) .Sa représentation graphique dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit D une partie de E . On appelle restriction de la fonction f à D, la fonction g définie sur D par
$g(x) = f(x)$, pour tout x de D. La représentation graphique de g est l'ensemble des points de C ayant pour coordonnées
(x , f(x)) , x appartenant à D.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D , $f(x) \leq f(x_0)$, on dit que la fonction f admet sur D un maximum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un maximum de f sur D.
Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D , $f(x_0) \leq f(x)$, on dit que la fonction f admet sur D un minimum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un minimum de f sur D.

Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
- La fonction f est dite majorée sur D s'il existe un réel M tel que pour tout x de D, $f(x) \leq M$.
- La fonction f est dite minorée sur D s'il existe un réel m tel que pour tout x et D, $m \leq f(x)$.
- La fonction f est dite bornée sur D s'il existe deux réels m et M tel que pour tout x de D, $m \leq f(x) \leq M$.

Théorème : On appelle fonction affine par intervalles toute fonction définie sur une réunion d'intervalles et telle que sa restriction à chacun de ces intervalles soit affine.

Définition : - On appelle partie entière d'un réel x et on note E(x) , le plus grand entier inférieur ou égal à x . - On appelle fonction partie entière la fonction qui à tout réel associe sa partie entière.
Soit E la fonction partie entière. Pour tout réel x , il existe un entier n tel que x appartient à [n , n+1[On a alors $E(x) = n$.

Théorème : Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I.
- Soit f est croissante sur I alors $\sqrt{f}$ est croissante sur I.
- Si f est décroissante sur I alors $\sqrt{f}$ est décroissante sur I.
- Si f est majorée sur I alors $\sqrt{f}$ est majorée sur I.

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble D telles que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ est notée $\frac{1}{g}$. La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est notée $\frac{f}{g}$.

LES EXERCICES

Exercice 1 : En utilisant le graphique de la fonction f représentée sur $[-4,5]$ contre :

1) Déterminer f (0) et f(2)
2) Déterminer les antécédents de 2 par f
3) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 2$
4) Déterminer les intervalles sur les quels la fonction f est croissante

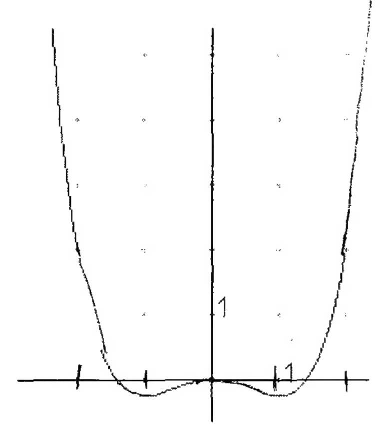
En utilisant le graphique de la fonction f de l'exercice précédant :

5) déterminer le maxima et le minimum de f pour quelles valeurs sont ils atteints ?
6) Donner le tableau de variation de f

Exercice 2 :

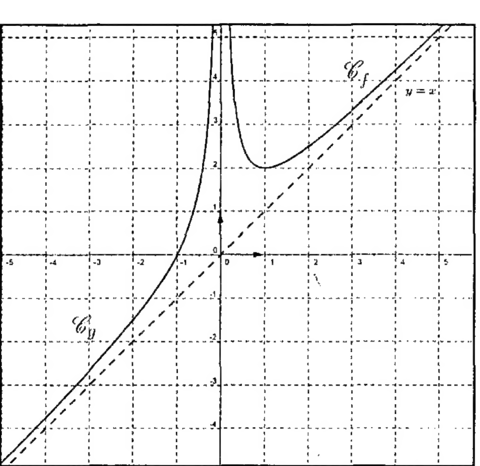
Dans la figure ci- contre d'une fonction paire f définie sur $\mathbb{R}$ est partiellement tracée :

1) Achever le tracé
2) Déterminer les variations de f sur $[-2,2]$

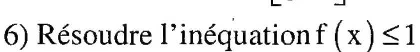


Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x - \dfrac{1}{x}$



1) Etudier la parité de chacune des fonctions f et g.
2) Montrer que f est croissante sur $[1,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty,1]$. Qu'en est il pour g.
3) Compléter les représentations graphiques de f et g dans le repère ci-contre :
4) Préciser si f est majorée, minorée, bornée ou non sur chacun des intervalles suivants : $\left[\dfrac{1}{2},3\right]$, $[1,+\infty[$ et $]0,1]$.



6) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 1$

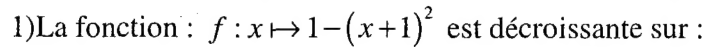


Exercice 4 :Répondre par vrai ou faux :

1) Si $f(-x) = f(x)$ alors f est impaire. 2) Si f est impaire et $f(0)$ existe, alors $f(0) = 0$.
3) Soit f définie sur IR telle que pour tout couple (a,b) de IR^2 $f(a+b) = f(b) - f(a)$ si f est périodique de période T alors $f(T) = 0$.
4)Si f est croissante sur un intervalle I alors f admet un maximum sur I.
5) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ alors f est minorée par -1 et majorée par 1.
6) Si f et g deux fonction impaires alors $f \times g$ est impaire.
7)La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+2}$ alors f est bornée.

Exercice5:Soit f une fonction numérique à variable réelle .
Répondre par vrai ou faux et expliquer :a/ $D_f = IR$
b/ f admet un minorant sur D_f .
c/ L'équation f(x) = -2 admet une seule solution
d/ f est paire.


Exercice 6 :
Indiquer la bonne réponse a , b ou c. Justifier votre réponse.


1)La fonction : $f : x \mapsto 1-(x+1)^2$ est décroissante sur :

$a)\ \left]-\infty,-1\right]$, $b)\left]-\infty,0\right]$, $c)\left[-1,+\infty\right[$

2) Soit la fonction $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$. Alors :

a) f est majorée par $3+\dfrac{2}{x^2+1}$,b) f est minorée par $-3-\dfrac{2}{x^2+1}$,c) f est majorée par 5

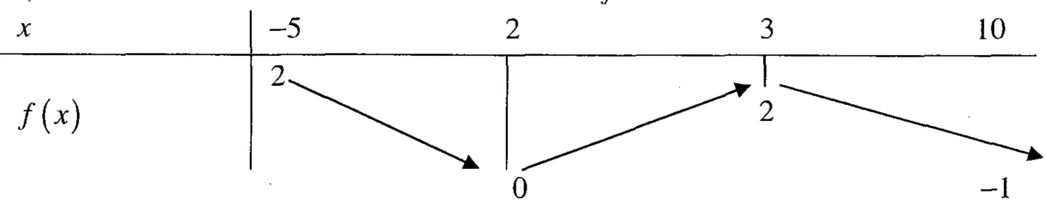
3) La fonction $g : x \mapsto x^2-5$ est l'image de la fonction $f : x \mapsto x^2$ par la translation de vecteur :

$a)\ -5\vec{i}$, $b)-5\vec{j}$, $c)5\vec{j}$

4) Soit La fonction définie sur IR par $f(x)=2+3\cos x$, un majorant de f sur IR est

$a)1$, $b)5$, $c)3$

5) Voici le tableau de variation d'une fonction f :

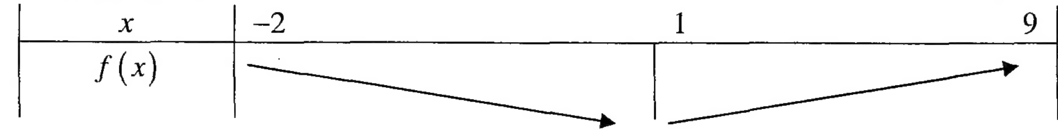


x	-5		2		3		10
$f(x)$	2	↘	0	↗	2	↘	-1

$i)$ Le maximum de f sur $[-5,10]$ est : $a)$ 9 , $b)$ 2 , $c)$ -1

$ii)$ On peut dire que : $a)\ f(-3)<f(1)$, $b)\ f(1{,}8)<f(-0{,}5)$, $c)\ f(-4)<f(8)$

Exercice7 :Le tableau ci-dessous est celui de des variations d'une fonction f .



x	-2		1		9
$f(x)$		↘		↗	

1)Montrer que $f(1)$ est la valeur minimale de f .

2)Posons $g(x)=-2f(x)\quad \forall x\in[-2\ ,\ 9]$. Dresser le tableau de variation de g .

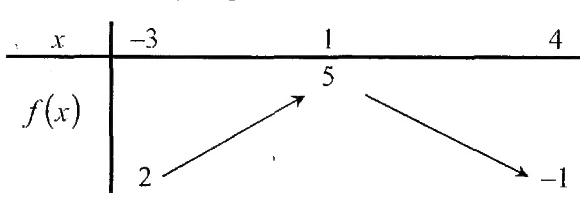
Exercice 8 : On considère une fonction f, définie et continue sur un intervalle [-3 ; 4], dont le tableau de variation est le suivant :

1) Préciser le minimum de f sur chacun des intervalles : [-3 ;4] et [1 ;2].

2) a- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans [1 ;4]

b- En déduire la position relative de ζ_f de la fonction f par rapport à l'axe des abscisses.

3) Justifier que la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{11-2f(x)}}$ est définie sur [-3 ;4].



x	-3		1		4
$f(x)$	2	↗	5	↘	-1

Exercice 9 :Soit la fonction $f(x)=\dfrac{x^4-4x^2+3}{-x^4+4x^2}$.

1)a)Déterminer D_f. .b) Montrer que f est paire.

2) a) Vérifier qu'il existe $x\in D_f$, tel que $f(x)=\dfrac{3}{4-\left(x^2-2\right)^2}-1$

b) Monter que f est minorée sur $\left]0,\sqrt{2}\right[$ .c) Montrer que 0 est le minimum de f sur $\left]\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right[$.

EXERCICE 10: Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^2 - 4x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Tracer (C).

2) a) Montrer que f est croissante sur $[2,+\infty[$. b) En déduire que si $x\in[2,4]$ alors $f(x)\in[-4,0]$.

c) Soit α un réel de l'intervalle $[0,\pi]$, montrer que $f(2+\cos^2\alpha)\leq 0$.

3) Justifier que f est continue en tout réel.

4) Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x)=|x-4|-4$.

On désigne par (C') la courbe représentative de h dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a)Montrer que h est une fonction affine par intervalles. b)Tracer (C').

c)Résoudre graphiquement dans IR l'inéquation : $\dfrac{(x-2)^2}{|x-4|}\geq 1$.

EXERCICE 11: On considère la fonction $f : x \rightarrow \dfrac{2x^2-1}{2-|x|}$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f. b) Montrer que f est paire.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle]-2 , 2[. a) Etudier le signe du trinôme $2x^2+x-3$ sur IR.

b) Montrer alors que g est majorée par 1 sur l'intervalle [0,1].

c) Montrer que 1 est un maximum de g sur [-1,1].

3) Montrer que g est minorée par -1 sur]-2 , 2[.

Exercice 12 : Soit $f(x)=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$ Montrer que $\forall\ x\in IR$; f est bornee.sur $\mathbb{R}$

Exercice 13 : Soit les fonctions : $f(x)=\dfrac{2+\sin x}{\sqrt{x}}$ *avec* $x>0$, $h(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x+1}$ *avec* $x\neq -1$

1)a) Montrer que pour tout $x>1$ *On a* $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\leq f(x)\leq\dfrac{3}{\sqrt{x}}$.b) En déduire que f est bornée sur $[1,+\infty[$

2) a) Montrer que pour tout $x>-1$ on a $\dfrac{2x-1}{x+1}\leq h(x)\leq\dfrac{2x+1}{x+1}$

b) En déduire que h est bornée pour $[0,+\infty[$

Exercice 14 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+3}$

1)Montrer que f est impaire. 2) Montrer que $\forall x\geq 0$, *On a* : $0\leq f(x)\leq\dfrac{2}{3}$

3)En déduire que $f(x)\in\left[-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right]$, $x\in IR$

Exercice 15 : Soit la fonction $f(x)=\dfrac{-4x^2+16x-17}{x^2-4x+5}$

Déterminer la valeur du réel x pour lequel $f(x)$ est maximale.

Exercice 16 : Soit $f(x)=x^2\ E\left(\dfrac{1}{x}\right)$. 1)Donner la restriction de f à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{5},+\infty\right[$

2)Tracer la courbe de restriction de f à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{5},+\infty\right[$

Exercice 17 : Soit h la fonction définie par : $h(x)=2x^2-3x+1$

1)Donner la forme canonique de $h(x)$

2)a) Etudier les variations de h sur $\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right[$ *et* $\left]-\infty,\dfrac{3}{4}\right]$. b) Donner la valeur minimale de h

3) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x)=2(x+2)^4-\dfrac{1}{8}$

a) Vérifier que pour tout $x\in IR$ On a $g(x)=h\left[(x+2)^2+\dfrac{3}{4}\right]$

b) Déduire que g est croissante sur $[-2,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty,-2]$

c) En déduire la valeur minimale de g

Exercice 18 : **A-** Soit la fonction $f(x)=x^2+\dfrac{16}{x}$

1) Déterminer D_f. 2) Montrer que $f(2)$ est la valeur minimale de f sur IR_+^*

B- On veut fabriquer un réservoir d'eau de volume 400 litres, son couvercle ayant la forme d'un parallélépipède de base un carré de coté x et de hauteur h.
1) Déterminer en fonction de x et h le volume de réservoir.
2) Exprimer en fonction de x l'aire A du réservoir.
3) Déterminer x pour que la quantité du métal utilisé pour fabriquer ce réservoir soit minimale.
Déterminer la valeur de h correspondante.

Exercice 19 On définit pour chaque couple de réels (a,b) la fonction f par : $f(x)=a-\sqrt{x+b}$.
Deux nombres réels u et v distincts sont dites changeables s'il existe au moins un couple (a,b) tel que la fonction f vérifie à la fois f(u) = v et f(v) = u.
1) Montrer que 2 et 3 sont échangeables. 2) Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?
3) A quelle condition deux entiers u et v sont-ils échangeables ?.

Exercice 20 : La fonction f est définie pour les entiers n et k par :

$$\begin{cases} f(0,n)=n+1 \\ f(k,0)=f(k-1,1) \\ f(k+1,n+1)=f(k,f(k+1,n)) \end{cases}$$

Calculer le nombre $f(2,2)$.

Exercice 21 : Déterminer l'application $f : IR\to IR$ tel que $\forall x\in IR$; $-x^2+f(x)+x\,f(-x)=0$

Exercice 22 :Soient $n\in IN^*$, $x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$ des éléments de IR, $\forall k\in IN^*$,

$S_n(x_i)=x_1^1+x_2^2+x_3^3+\ldots\ldots+x_n^n$ et on suppose $S_2=S_3=S_4$. Montrer que $\forall i\in\{1;2;\ldots;n\}$

on a : $x_i=0$ *ou* $x_i=1$. Exprimer d'abord $S_n\left(\left(x_i^2-x_i\right)^2\right)$ en fonction de $S_2,S_3 et S_4$.

Exercice 23 :1)Etablir que $\forall x \in [0;1]$; $0 \le x(1-x) \le \frac{1}{4}$

2)En déduire que $\forall (a,b,c) \in [0;1]^3$; $\min[a(1-b);b(1-c);c(1-a)] \le \frac{1}{4}$

Exercice 24 :Trouver les couples d'applications (f,g) *de* IN^* *dans* IN^* tels que $\forall (x,y) \in IN^{*2}$,

$[f(x)]^{g(y)} + [f(y)]^{g(x)} = x+y$

Exercice25

L'objectif de l'exercice est de déterminer une fonction $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ qui vérifie les deux conditions (**N** désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.) :

- $f(1)=1$
- pour tous les entiers naturels m et n, $f(m+n) = f(n)\times f(m) + f(n) + f(m)$

1) On suppose qu'une telle fonction f existe.
   a) Calculer $f(0)$. (On pourra poser $n = 0$ et $m = 1$)
   b) Calculer $f(2), f(3), f(6)$.
2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $f(n+1)=2f(n)+1$
3) On pose pour tout entier naturel n, $g(n)=f(n)+1$.
   Montrer que, pour tous les entiers naturels m et n : $g(n+m) = g(n)\times g(m)$.
4) Donner une fonction f qui réponde au problème.

Exercice 26

Une fonction étrange

Soit f la fonction qui à tout couple d'entiers naturels $(x;y)$ associe l'entier naturel tel que :

$f(0;y) = y+1$, $f(x;0) = f(x-1;1)$, $f(x+1;y+1) = f(x;f(x+1;y))$

Calculer $f(2;1)$ et $f(2;2)$.

Exercice 27 : Soit f l'application définie sur $[0,1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (1) \quad f(1)=1 \\ (2) \quad f(x) \ge 0 \, \forall x \in [0,1] \\ (3) \quad \forall x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ ; n \in IN^* \text{ et } x_k \in [0,1] \ \forall n \in [0,\ldots,n] \text{ tels que}: \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le 1 \text{ on a}: f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \ge f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \end{cases}$$

1)Montrer que $f(0)=0$.

2)Montrer que $\forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$; $f(x) \le 2$.

3)On suppose que $\forall x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$, *il existe* $n \in IN$ *tel que* : $\frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n}$. Montrer que $f(x) \le 2$.

Déduire que f est bornée sur $[0,1]$.



RESUME DU COURS

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
On dit que la fonction f est continue en a si pour tout réel β > 0, il existe un réel α > 0 tel que si x appartient à I et $|x - a| < \alpha$, alors $|f(x) - f(a)| < \beta$.

Conséquence :
- Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I, met en évidence un tracé continu de la courbe la fonction f est continue en tout réel a de I.
- Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I met en évidence un saut du tracé de part et d'autre du point A (a , f(a)), la fonction f est discontinue en a ...

Théorème (admis) : Toute fonction constante est continue en tout réel a .
La fonction $x \mapsto x$ est continue en tout réel a.
Toute fonction linéaire est continue en tout réel a .
Toute fonction affine est continue en tout réel a.
La fonction $x \mapsto x^2$ est continue en tout réel a.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout réel non nul a.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout réel strictement positif a.
Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
Toute fonction rationnelle est continue en tout réel où elle est définie.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f est continue en a , alors $|f|$ est continue en a.

4- Opérations algébriques sur les fonctions continues

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I . Soit a un réel de I et k un réel.
Si f et g sont continues en a alors les fonctions f + g , fg et kf sont continues en a.
Si f est continue en a et si f(a) ≠ 0 alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue en a.
Si f et g sont continues en a et si g(a) ≠ 0 alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a.

Théorème : Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .
Si f est continue en a , alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

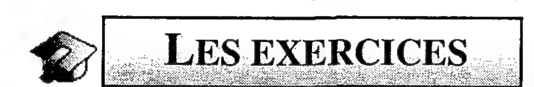
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
On dit que la fonction f est continue à droite en a si , pour tout β > 0 , il existe α > 0 tel que si x appartient à I et $0 \leq x - a < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$.
On dit que la fonction f est continue à gauche en a si , pour tout β > 0 , il existe α > 0 tel que si x appartient à I et $0 \leq a - x < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.
f est continue en a , si et seulement si , f est continue à droite et à gauche en a.

Théorème (admis) : Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I et a un réel de I.
* Si f est continue à droite en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue à droite en a.
* Si f est continue à gauche en a , alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue à gauche en a.

Définition :- Soit a et b finis ou infinis. Une fonction définie sur un intervalle]a , b[est dite continue sur]a , b[si elle est continue en tout réel de]a , b[.
- Soit a fini ou infini et b un réel.

Une fonction définie sur un intervalle]a , b] est dite continue sur]a , b] si elle est continue sur]a , b[et continue à gauche en b.
- Soit a un réel et b fini ou infini .
Une fonction définie sur un intervalle]a , b[est dite continue sur [a , b[si elle est continue sur]a , b[et continue à droite en a.
- Soit a et b deux réels .
Une fonction définie sur un intervalle [a , b] est dite continue sur [a , b] si elle est continue sur]a , b[, continue à droite en a et continue à gauche en b.
Conséquence : Si une fonction est continue sur un intervalle I , alors elle est continue sur tout intervalle inclus dans I.
Conséquence : Toute fonction polynôme est continue sur tout intervalle contenu dans IR.
Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.
Théorème (admis) : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle .
Théorème (admis) : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que a < b .
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) , l'équation f(x) = k possède au moins une solution dans l'intervalle [a , b] .



EXERCICE 1 : L'une des réponses suivantes est correcte, laquelle ?

1) f est une fonction continuer sur [1 , 2] telle que f(1) . f(2) < 0 alors l'équation f(x) = 0.
a) admet une solution dans [1 , 2] b) n'admet pas de solution dans [1 , 2]

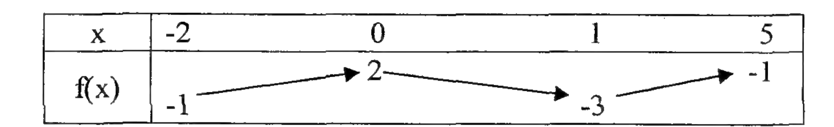
2) L'équation $4\sqrt{x+1}-x^2-3=0$ admet une solution dans : a) $[0;1]$; b) $[-1;0]$; c) $[2;3]$

3)soit f une fonction continue sur $[0.3]$ telle que $f(0)=2$; $f(1)=-1$; $f(2)=3$ et $f(3)=-4$

Alors l'équation $f(x)=0$ admet dans $[0,3]$

a/ une seule solution b/ exactement deux solutions c / au moins trois solutions

4) f est une fonction continue sur [-2 ;5] dont le tableau de variation est :
a) L'image de l'intervalle [-2,1] par f est [-3 ;-1].
b) L'équation f(x) = -1 admet exactement deux solutions dans [-2 ;5].
c) f(4) ≤ f(-1)



x	-2	0	1	5
f(x)	-1 ↗	2 ↘	-3 ↗	-1

5) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$.

a) f est impaire b) f est continue sur $\mathbb{R}$ c) f^2 est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 : Répondre par vrai ou faux

Soit f une fonction strictement décroissante sur $[0,1]$ tel que $f(0)=4$:

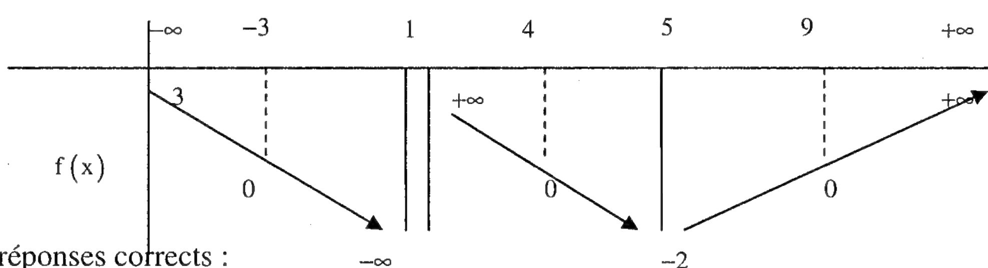
a) f est continue sur $[0,1]$,et $f(1)=-3$,alors il existe un réel α tel que $f(\alpha)=0$

b) f est continue sur $[0,1]$,alors l'équation $f(x)=\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$ admet une unique solution dans $[0,1]$

c- Si $f(1)\langle 0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[0,1]$

d- f est continue sur $[0,1]$,alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[0,1]$

<u>Exercice 3</u> : Soit f une fonction dont le tableau de variation est :

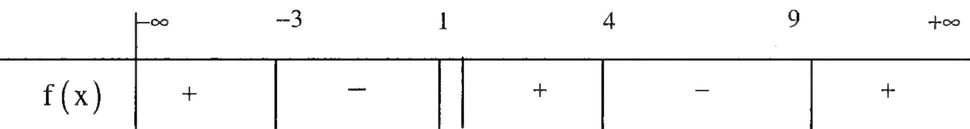


Cocher la ,ou les réponses corrects :

a)l'équation $f(x)=-1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$

b)l'équation $f(x)=-5$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$

c)l'mage de $]1,9]$ *est* $[0,+\infty)$ d)le signe de f



x	$-\infty$	-3	1	4	9	$+\infty$
f(x)	+	−	‖ +	−	+	

<u>Exercice 4</u> : Répondre par « Vrai » ou « Faux » :

1) f est continue sur $[1\,;3]$ telle que $f(1)=-2\,et\,f(3)=5$ alors il existe un réel $c\in[1\,;3]$ tel que $f(c)=0$.

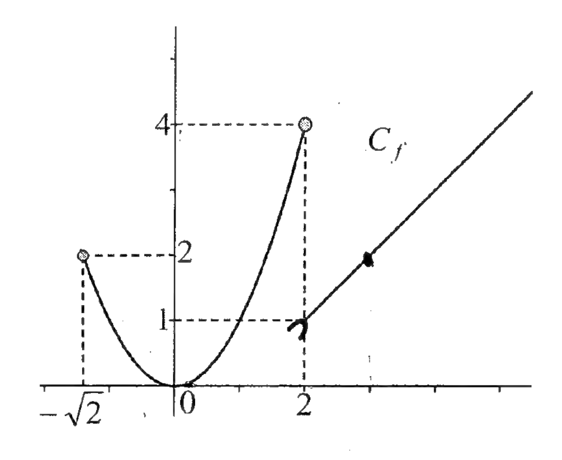
2) Si f est définie sur IR alors f est continue sur IR.

3) Si f une fonction continue sur IR, On suppose que f paire et l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[0\,;+\infty[$ alors l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions dans IR

<u>Exercice 5</u> : En utilisant la définition de la continuité, étudier la continuité de la fonction : $f(x)=x^2+5x+2008$.

<u>Exercice 6</u> :Soit $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$, $x\in\,]-3\,;3[$ .Montrer par définition que f est continue en 0

<u>EXERCICE 7 :</u>Dans le plan muni d'un repère orthogonal, ζ_f est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\left[-\sqrt{2},+\infty\right[$. Répondre par vrai ou faux :

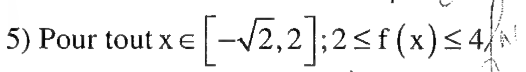


1) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4$ 2) f(2) = 1

3) Le domaine de continuité de f est $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

4) 4 est le maximum de f sur D_f .

5) Pour tout $x\in\left[-\sqrt{2},2\right];2\le f(x)\le 4$

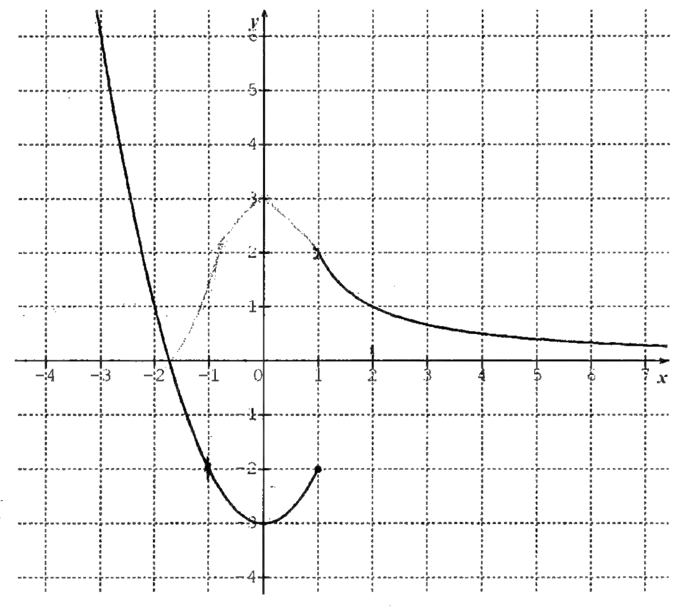


6) $f\left(\left[-\sqrt{2},3\right]\right)=[0;4]$

EXERCICE 8:Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

1)Déterminer l'ensemble de définition de f.
2)Montrer que f est continue sur [1, 2].
3)Montrer que l'équation f(x) = x admet dans [1, 2] une solution α. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Exercice 9 : On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f, dans un repère orthonormé.



1) a- f est-elle continue en 1 ? Justifier votre réponse.
b- Déterminer graphiquement l'image de chacun des intervalles suivants :[-2 ;0] et [-1 ;2].
2) a- Tracer la courbe de la fonction : $h = |f|$ dans le même repère.
b- La fonction h est-elle continue en 1 ? Justifier votre réponse.
3)a- Déterminer graphiquement les solutions de l'équations f(x) = 1.
b) Résoudre graphiquement l'inéquations f(x) ≥1.
4) Tracer le courbe de la fonction g définie par : g(x) = h(x+1) – 2.

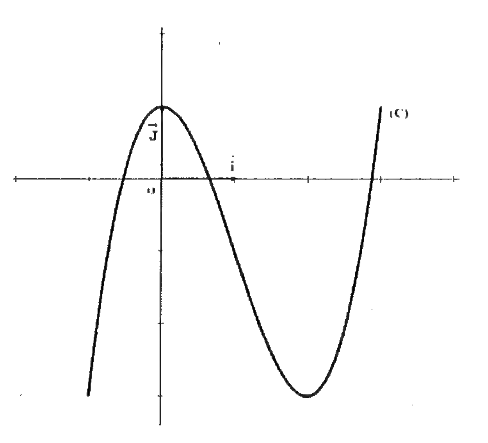
Exercice n°10 : on considère la fonction f définie par : $f(x) = x^6 + 3x^2 - 3$.

1) a- Etudier la parité de f. b- Montrer que f est décroissante sur [0 ;1].
c- En déduire l'image de l'intervalle [-1 ; 1] par f.
2) Choisir la bonne réponse à la question posée, en justifiant votre choix.
L'équation $x^6 + 3x^2 - 3 = 0$ admet dans l'intervalle [-1, 1] :
a- Une seule solution. b- Aucune solution. c- Deux solutions.

Exercice n° 11 : Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-5x+1}{2x^2+x+1}$. 1) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2) a/ Montrer que f est minorée par (-1) et majorée par 4.
b/ (-1) est-il un minimum de f(x) sur $\mathbb{R}$ et 4 est-il un maximum de f(x) sur $\mathbb{R}$? Expliquer.
3) a/ Montrer que l'équation f(x) = 2 admet dans l'intervalle [-2 ;-1] au moins une solution α.
b/ Montrer que : $\alpha^2 = -\dfrac{7}{4}\alpha - \dfrac{1}{4}$.

Exercice n°12 : On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction définie sur [-1 ;3].



1) Justifier la continuité de f sur [-1 ;3].
2) Déterminer graphiquement les variations des intervalles [-1 ;3]
3) Déterminer graphiquement les images des intervalles [0 ; 2] et]-1 ;1[.

4) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans [0 ;1] une seule solution α.

Exercice 13 : Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = (3x+1)\sin\left(\dfrac{1}{3x+1}\right) \; si \; x \neq -\dfrac{1}{3} \\ f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est continue en $-\dfrac{1}{3}$.

Exercice 14: Soit la fonction $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}} & si \; x > 0 \\ g(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{x} & si \; x \in IR_+ \end{cases}$

1) Montrer que g est continue en 0
2) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $|f(x)| \leq g(x)$.

En déduire que f est continue en 0

Exercice 15: Soit f une fonction continue sur [1 , 2] tels que f ([1 , 2]) = [1 , 2] . Montrer qu'il existe au moins un réel c ∈ [1 , 2] tel que f (c) = c .

Exercice 16 : Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & si \; x \neq 0 \\ 0 & si \; x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est continue en 0

Exercice 17 :Soit la fonction $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$.

1)Montrer que f est continue sur IR. 2)Calculer $f(-1)$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; $f(0)$; $f(1)$.

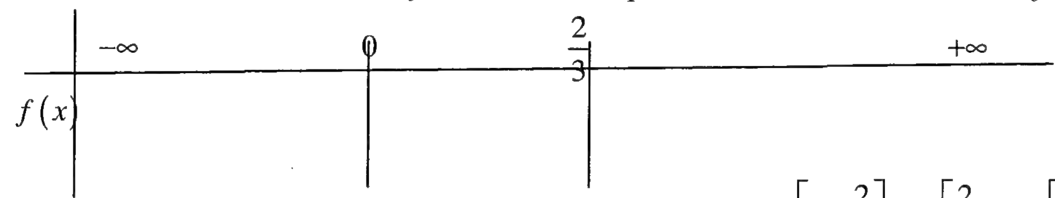
3)Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions distinctes comprises entre -1 *et* 1 .

Exercice 18 :Soit la fonction $f(x) = x^3 + 3x$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = -2$ admet au moins une solution α dans $[-1; 0]$.
2) Donner une valeur approchée par défaut de α à 10^{-1} prés.

Exercice 19 :Soit la fonction $f(x) = x^3 - x^2 + 5$.

1) Justifier la continuité de f sur IR. 2)Compléter le tableau de variation de f :



3)Déterminer les images des intervalles suivants : $]-\infty;0]$; $\left[0\,;\dfrac{2}{3}\right]$ *et* $\left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$ par f.

4)Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans IR.

5)Déduire le signe de $f(x)$ sur IR.

Exercice 20:Soit la fonction $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x-3}+2}$

1)Déterminer l'ensemble de définition de f .2)Justifie la continuité de f sur D_f.

3)Montrer que f admet un minimum en 3. 4)Montrer que f est majorée par 1.

5)Montrer que l'équation $f(x)=3-x$ admet une solution dans l'intervalle $]3\,;\,4[$.

Exercice 21 :Soit la fonction $f(x)=8x^3+6x$

1) Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution $\alpha\in\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.

2) Soit la fonction $g(x)=2x^4+3x^2-x-1$

a) Montrer que g est continue sur IR. b)Montrer que $g(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right)-1$.

3)Montrer que $-\dfrac{11}{8}<g(\alpha)<-1$.

Exercice n° 22 : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ \sqrt{x-E(x)} & \text{si } x\in[0;2[\\ 1-\dfrac{1}{2}(x-1)^2 & \text{si } x\in[2;+\infty[\end{cases}$.

1) Donner l'expression de f(x) sur chacun des intervalles [0 ;1[et [1 ;2[.
2) Tracer la courbe de la restriction de f sur l'intervalle [0 ;2[.
3) a) f est-elle continue sur [0 ;2[.
b) Justifier la continuité de f sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $[2,+\infty[$

Exercice 23 :Soit la fonction $f(x)=\begin{cases}-x & si\ \ x\leq 0\\ x^2 & si\ \ 0<x<1\\ \sqrt{x-1} & si\ \ x\geq 1\end{cases}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f.
2- Tracer la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$.
3- Justifier la continuité de f sur chacun des intervalles : $]-\infty,0]$, $]0\,,1[$ *et* $[1,+\infty[$
4- f est elle continue sur IR ?

Exercice 24 :Soit la fonction définie sur $\left[-\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$ par : $\begin{cases}f(x)=\dfrac{\sqrt{4+3x}-2}{x} & si\ \ x\neq 0\\ f(0)=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

1) a) Montrer que $\forall\ x\in\left[-\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$; $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{4+3x}+2}$

b) En déduire que f est continue sur $\left[-\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$

2) a) Montrer que $f\left(-\frac{4}{3}\right)$ est un maximum de f sur $\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$.

b) Montrer que f est bornée sur $\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$

3) Montrer que l'équation $f(x)=x-1$ admet une solution dans l'intervalle $[1\,;2]$.

4) a) Montrer que f est décroissante sur $\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$. b) Déterminer l'image par f de l'intervalle $[0\,;1]$.

Exercice 25 :Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}2x+\sqrt{x^2+4x+4} & si\ \ x\le 0\\ x+2+E(x)\ \ si\ \ 0 < x\le 2\end{cases}$

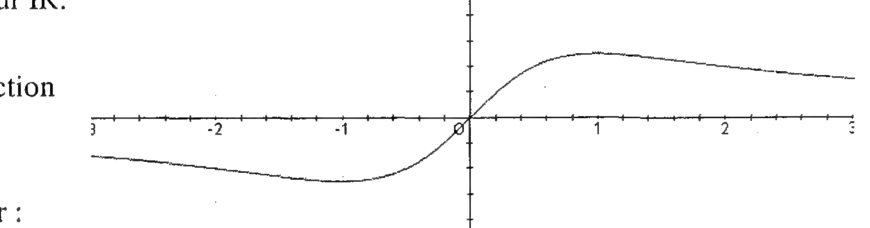
1- Déterminer l'ensemble de définition de f.

2- Montrer que f est une fonction affine par intervalle.

3- a- Tracer la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$.

b- Etudier la continuité de f en 0 et 1.

Exercice N° 26: Dans le graphique ci-contre, ξ est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie sur IR.



1) Déterminer graphiquement :

a) Le minimum et le maximum de f sur IR.

b) L'image de $[0;+\infty[$ par f

c) L'ensemble de définition de la fonction g définie par $g(x)=\frac{1}{2f(x)-1}$.

2) Soit h la fonction définie sur IR par :

$\begin{cases}h(x)=-|x+1|-2 & si\ \ x\in\,]-\infty;0[\\ h(x)=2x-1 & si\ \ x\in[0;+\infty[\end{cases}$

a) Montrer que h est une fonction affine par intervalles.

b) Tracer sur le graphique donné la courbe ξ' de h.

c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=h(x)$

d) Déterminer graphiquement l'image de IR par h.

3) On admet que $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

a) Montrer que l'équation $f(x)=2x-1$ est équivalente à l'équation $2x^3-x^2+x-1=0$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=2x-1$ admet une solution α dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2};1\right[$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\ge 2\alpha-1$.

Exercice 27 :Soit $f\,,\,g\;:\;IR\rightarrow IR$ deux applications continues telle que $\forall x\in IR\;;\;f(x)=0\;\;\Rightarrow g(x)\neq 0$. Montrer qu'il existe deux applications $u,v:IR\rightarrow IR$ continue telle que $uf+vg=1$.

RESUME DU COURS

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I .
On dit que f(x) tend vers le réel L lorsque x tend vers a , si pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 < |x - a| < \alpha$, alors $|f(x) - L| < \beta$.

Théorème (admis) : Soit f une fonction définie sur un intervalle I , sauf peut-être en un réel a de I.
Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et réel a de I. f est continue en a , si et seulement si , $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I et soit g une fonction définie sur l'intervalle I. Si g est continue en a et si g(x) = f(x) pour tout $x \neq 0$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = g(a)$

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I et admettant une limite L en a . Alors la fonction F définie par $F(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq a \\ L & si\ x = a \end{cases}$ *est continue en a*

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I et telles que f et g admettent pour limites respectives L et L' en a . Alors
$\lim_a (f+g) = L + L'$; $\lim_a kf = KL$, pour tout réel k ; $\lim_a (fg) = LL'$; $\lim_a |f| = |L|$.

Si $L \neq 0$ alors $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{L}$. Si $L' \neq 0$ alors $\lim_a \frac{f}{g} = \frac{L}{L'}$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I et admettant pour limite L en a.
Si f(x) est positif pour tout réel x distinct de a , alors $L \geq 0$.
Si f(x) est négatif pour tout réel de x distinct de a , alors $L \leq 0$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I et admettant pour limite L en a ;$L \geq 0$.
Si f(x) est positif pour tout réel x distinct de a , alors $\lim_a \sqrt{f} = \sqrt{L}$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I.
On dit que la fonction f admet pour limite à droite en a , si pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 < x - a < \alpha$ alors $|f(x) - L| < \beta$.
On écrit $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ ou $\lim_{a^+} f = L$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = L$.

On dit que la fonction f admet pour limite le réel L à gauche en a , si pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 < a - x < \alpha$ alors $|f(x) - L| < \beta$.
On écrit $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ ou $\lim_{a^-} f = L$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = L$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I .
$\lim_{x \to a} f(x) = L$, si et seulement si , $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
La fonction f est continue à droite en a , si et seulement si , $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
La fonction f est continue à gauche en a , si et seulement si , $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Théorème : *Soit f une fonction définie sur un intervalle [a , b[sauf peut-être en a et g une fonction* définie sur un intervalle contenant [a , b[. Si g est continue à droite en a et si g(x) = f(x) pour tout x de] a , b [, alors $\lim_{x\to a^+} f(x) = g(a)$. Soit f une fonction définie sur un intervalle] a , b] sauf peut-être en b et g une fonction définie sur un intervalle contenant] a , b] .
Si g est continue à gauche en b et si g(x) = f(x) pour tout x de] a , b[, alors $\lim_{x\to b^-} f(x) = g(b)$.



LES EXERCICES

Exercice :1 : L'une des réponses suivantes est correcte, laquelle ?

1/ Si f est une fonction définie en -1 et telle que : $\lim_{-1} f = 3$ alors :

a) f est continue en 1 b) f(-1) = -3 c) $\lim_{-1} |f| = 3$.

2) Soit la fonction f : x $\mapsto \sqrt{2x-4}$ alors f est continue : a/ en 2 b/ à droite en 2 c/ à gauche en 2.
3) Soit p un entier. Pour tout réel x de l'intervalle] p ; p + 1[on a : E(x) + E (-x) est égale à :
a/ 0 b/ -1 c/ 2p.
4)Soit f une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle [a,b], (a < b) telle que :
f(a) > 2 et 1<f(b)<2.
On admet que l'équation : a) f(x) = 1 admet une unique solution $\alpha \in]a,b[$.

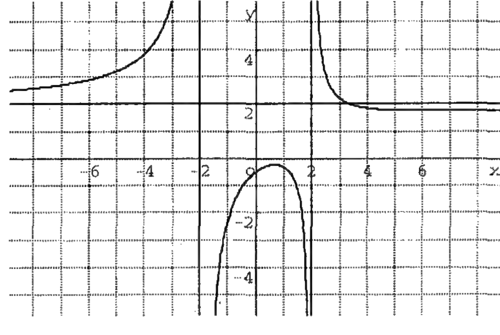
b) f(x) = 2 admet une unique solution $\alpha \in]a,b[$. c) f(x) = 2 admet au moins une solution $\alpha \in]a,b[$.

5) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et telle que : $\lim_{2^+} f = -3$ et $\lim_{2^-} f = -3$ alors :

a) f est prolongeable par continuité en 2. b) f est continue en 2 c) f(2) = -3

Exercice 2 : La figure ci-dessous (c) est la représentation graphique d'une fonction f et les droites :
$\Delta_1 : x = 2$; $\Delta_2 : x = -2$ *et* $\Delta_3 : y = 2$.

Cocher la ou (les) réponse(s) correcte(s) :



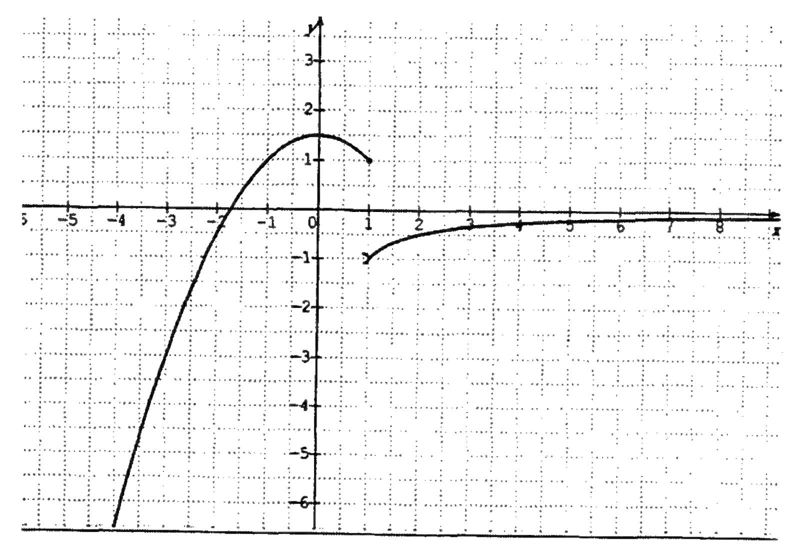
1) La fonction f est définie sur : a) $IR/\{-2\}$
b) $IR/\{2\}$ c) $IR/\{-2 , 2\}$

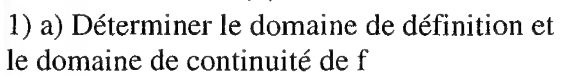
2) La fonction f est continue sur : a) $IR/\{-2 , 2\}$ b) $IR/\{2\}$
c) $IR/\{-2\}$ d) $[3 , +\infty[$

3) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$ b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ c) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$
d) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

4) a) L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-2 , 2[$
b) L'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique dans $]-\infty , -2[$
c) L'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions dans $IR/\{-2 , 2\}$
d) L'équation $f(x) = 5$ admet exactement deux solutions dans $]-3 , 2[$

Exercice N° 3 : La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note $g = |f|$.




1) a) Déterminer le domaine de définition et le domaine de continuité de f
b) Déterminer la limite de f à droite et à gauche en 1.
2) a) Tracer (C') la courbe représentative de g.
b) g est-elle continue en 1 ? Justifier.
3) Déterminer l'image de l'intervalle $[-1;2]$ par f et l'image de l'intervalle $[-3;5]$ par g.

Exercice 4: Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3} - \sqrt{-3x+1}}{x+4}, & si \ x \neq -4 \\ f(-4) = a, & a \in IR \end{cases}$

1) Discuter suivant le réel a la continuité de f en -4.

2) Soit la fonction $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}, & x \in IR/\{-1 \ ; \ 1\} \\ f(1) = a, & a \in IR \\ f(-1) = b, & b \in IR \end{cases}$

a- Existe – t – il une valeur pour le réel a pour que f soit continue en 1 ?

b- Existe – t – il une valeur pour le réel b pour que f soit continue en -1 ?

Exercice 5: Soit la fonction : $f(x) \begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2-2x-1}{x-1}, & si \ x > 1 \\ f(x) = \dfrac{-x^2-2x+3}{|x-1|}, & si \ x < 1 \\ f(1) = \alpha, & \alpha \in IR \end{cases}$

Déterminer le réel α pour que f soit continue en 1.

EXERCICE 6: Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & si \ \ x > 2 \\ f(x) = \dfrac{2x^2-5x+3}{4(x-1)} & si \ \ x \leq 2 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f. 2) Montrer que $\forall x \in]\ 2 \ , \ +\infty[\ \ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}$.

3) Montrer que f est continue en 2. 4) Montrer que f est bornée sur]2 , +∞[.

5) f admet-elle un prolongement par continuité en 1.

Exercice 7 : Soit : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & si\ \geq -1\\ \dfrac{-|x|^3+x^2}{x+1} & si\ x<-1\end{cases}$; et $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1} & si\ x\in\ ]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[\\ \dfrac{1-x^2}{1-x^3} & si\ x\in\ ]-1;1[\end{cases}$

Étudier la continuité des fonctions f , g sur leurs domaines de définition.

Exercice N° 8 : 1) Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$.

a) Déterminer D le domaine de définition de f.

b) f est-elle prolongeable par continuité en -1 ? Si oui donner son prolongement.

2) Soit m un paramètre réel et g la fonction définie sur IR par : $\begin{cases}g(x)=\dfrac{|x+3|-1}{x^2+x-2} & \text{si } x<-2\\ g(x)=f(x) & \text{si } -2\leq x<-1\\ g(x)=x^2+mx & \text{si } x\geq -1\end{cases}$

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to -3} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} g(x)$

b) Calculer la limite de g à droite et à gauche en -2. Conclure.

c) Déterminer la valeur de m pour que g soit continue en -1.

d) Pour la valeur de m trouvée, déterminer le domaine de continuité de g.

Exercice9 : Soit la fonction $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{2x^2+2}}{x-1}$.

1) Donner un prolongement par continuité de f en 1.

2) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\begin{cases}f(x) & si\ x\in\ ]-\infty\ ;1[\\ \dfrac{ax^2-9}{x-3}-5 & si\ x\in[1\ ;2]\\ \dfrac{x^3-7x-6}{x^2-5x+6} & si\ x\in\ ]2\ ;+\infty[\end{cases}$

a) Déterminer D_g

b) Déterminer a pour que g soit continue en 1. C)Etudier la continuité de g en 2 pour $a=1$.

3) Préciser le domaine de continuité D_c *de* g .

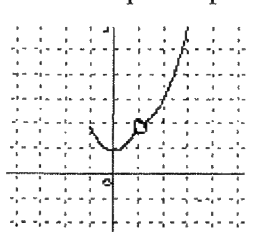
Exercice 10 :

Soit $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-x+4}-ax}{x-2} & si\ x\in\ ]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[-\{2\}\\ \dfrac{x^2+E(x)}{x+1} & si\ x\in\ ]-1;1[\end{cases}$

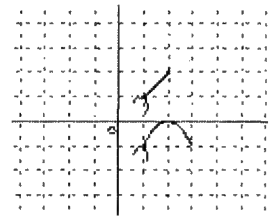
1) Donner D_f le domaine de définition de f .

2)Déterminer a pour que f soit continue en -1. 3)Etudier la continuité dé f sur $]-1;1[$

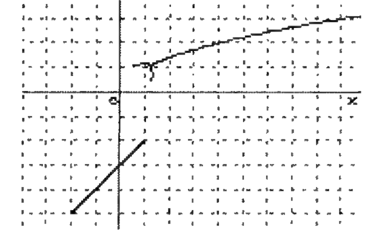
Exercice 11 : Les courbes représentées ci -dessous sont celles de trois fonctions f , g et h. Préciser parmi f , g et h celle qui est prolongeable par continuité en 1



C_f



C_g



C_h

Exercice 12: I) On a représenté ci-contre une fonction g. Répondre aux questions de cette partie (I) par lecture graphique :

1) Déterminer le domaine de définition de g.

2) Donner $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$.

3) a- Peut-on se poser la question de la continuité de g en 1 ? Pourquoi ?

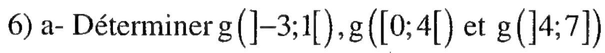
b- Peut-on se poser la question de la continuité de g en 4 ? Pourquoi ?

c) g est-elle prolongeable par continuité en 4 ? Si oui déterminer son prolongement.

4) a) 3 est-il un majorant de g ?

b)3 est-il un maximum pour g ?

5) Déterminer le minimum de g. En quel réel est-il atteint ?



6) a- Déterminer $g(]-3;1[)$, $g([0;4[)$ et $g(]4;7])$

b- Déterminer l'ensemble des antécédents par g des réels de l'intervalle [-3 ; 2].

II) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x+3}-1 \text{ si } x\geq -3 \\ \dfrac{x^3+3x^2-10x-30}{x+3} \text{ si } x<-3 \end{cases}$$

1) a) Vérifier que pour tout x < -3, $f(x)=x^2-10$.

b) En remarquant que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^2-10$ est continue sur $\mathbb{R}$, calculer $\lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x)$.

c) Montrer que f est continue en -3.

d- Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.

2) a) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans [-3 ;0] au moins une solution a.

b) Montrer que a est une solution de l'équation : $x^3+2x^2-2x-1=0$.

c) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

Exercice 13: Soit la fonction : $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$ .1)Déterminer D_f.

2)Montrer que $\forall\ x\in D_f$; $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2x+5}+3}$. 3)Calculer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

4)Donner le prolongement par continuité de f en 2.

Exercice N°14 : I) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+2}$.

1) Montrer que pour tout $x\in$ IR , on a : $0\leq f(x)\leq\dfrac{1}{3}$.

2) a) 0 est-il un minimum de f ? ; b) $\dfrac{1}{3}$ est-il un maximum pour f ?

3) Montrer que f est continue sur IR.

4) Soit h la fonction définie par $h(x)=f(x)-x$; $x\in$ IR .

a) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution $\alpha\in[0;1]$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-1} prés de α.

II) Soit $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

1) Déterminer le domaine de définition de g . 2)Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

Exercice N°15 : Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si } x\leq 1\\ \sqrt{x+3} & \text{si } x>1\end{cases}$

1) Justifier la continuité de f sur chacun des intervalles $]-\infty;1]$ et $]1;+\infty[$

2) Etudier la continuité de f à gauche et à droite en 1. Conclure.

3) a) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Prouver à l'aide du graphique que f n'est pas continue sur IR.

c) Déterminer graphiquement les images des intervalles $[-1;0]$ et $[0;6]$.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}$.

EXERCICE N°16:Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{si } x>2\\ f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{4(x-1)} & \text{si } x\leq 2\end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que $\forall x\in]\,2\,,\,+\infty[$ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}$ .3) Montrer que f est continue en 2.

4) Montrer que f est bornée sur]2 , +∞[.5) F admet-elle un prolongement par continuité en 1.

Exercice n°17 : 1/ Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{|x+2|-1}{x^2+4x+3}$.

a) Déterminer D le domaine de définition de f. b) Déterminer : $\lim\limits_{-3} f$ et $\lim\limits_{-1} f$.

2/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3} & \text{si } x\neq 3 \\ g(3)=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ .a) Déterminer $\lim\limits_{3} g$.

b) g est elle continue en 3.

3/ Soit m un paramètre réel et soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x)=\dfrac{x^3-x-6}{x-2} & \text{si } x<2 \\ h(x)=\sqrt{x^2+5}+mx & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

a) Déterminer la valeur de m pour que h soit continue en 2.
b) Pour la valeur de m trouvée déterminer le domaine de continuité de h.

<u>Exercice 18 :</u> Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}+x}{x+1}$.

1)Déterminer D_f. 2)Calculer $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ .3)Donner le prolongement par continuité de f en -1.

4)On considère la fonction : $g(x)=\begin{cases} f(x) & si \quad x>-1 \\ \dfrac{x^3+2x^2+x}{x+1}+\dfrac{3}{2} & si \quad x<-1 \\ g(-1)=\dfrac{3}{2} & si x=-1 \end{cases}$

a)Déterminer D_g. b)Etablir la continuité de g en -1. c)Déterminer le domaine de continuité de g.

<u>Exercice 19:</u> 1)Montrer que la fonction $f(x)=E(x)$ est continue sur $IR/\mathbb{Z}$.

2)Soit les fonctions : $g(x)=E(x)-(x-E(x))^2$ et $h(x)=x-E(x)-(x-E(x))^2$

Etudier la continuité de g et h

<u>Exercice 20 :</u> Soit la fonction suivante , $f:IR\to IR$

$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-9}+mx+2 & si \ x\in\,]-\infty,-3]\cup]3\,,+\infty[\\ \dfrac{x^2+3E(x)}{x^2+7x+12} & si \ x\in\,]-3\,,-1] \end{cases}$ Avec m un paramètre réel.

1)Déterminer le domaine de définition de f.

2)Déterminer m pour que f soit continue en -3 . 3)Etudier la continuité de f sur $]-3,-1]$.

4)On donne $m=\dfrac{8}{3}$.

5)a) Calculer les limites éventuelles suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3}$

b) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{8}{3}x+3$ admet une solution dans $[-4\,,-3]$.

<u>Exercice 21 :</u> Soit la fonction $f:IR\to IR$; $x\mapsto \dfrac{x^2+E\left(\dfrac{x}{3}\right)}{x+2}$

1) f est elle continue en 2 ? 2) f est elle continue en 3 ?

RESUME DU COURS

Définition : Soit a un réel et f une fonction définie sur $[a\ ,+\infty[$.
On dit que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si, pour tout A> 0 , il existe B > 0 tel que si $x \geq a$ et x > B alors f(x) > A. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$.
On dit que f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si , pour tout A < 0 , il existe B > 0 tel que si $x \geq a$ et x > B alors f(x) < A. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ *ou* $\lim\limits_{+\infty}=-\infty$.
Lorsqu'on étudie la limite de f quand x tend vers $+\infty$, il suffit d'étudier le comportement de f , lorsque x est positif et prend de grandes valeurs. On dit alors que l'on étudie le comportement de f au voisinage de $+\infty$. Si $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$ alors il existe un réel B> 0 tel que f(x) > 0 , pour tout x > B.

Si $\lim\limits_{+\infty} f=-\infty$ alors il existe un réel B > 0 tel que f(x) < 0 , pour tout x > B.

Théorème : Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul , $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-a}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-a)^n=+\infty$.

Définition : Soit a un réel et f une fonction définie sur $]-\infty\ , a]$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si , pour tout A > 0 , il existe B < 0 tel que si $x \leq a$ et x < B alors f(x) > A. On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ *ou* $\lim\limits_{-\infty} f=+\infty$. On dit que f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si pour tout A < 0, il existe B < 0 tel que si x < B alors f(x) < A . On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ *ou* $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$. Lorsqu'on étudie la limite de f(x) quand x tend vers $-\infty$, il suffit d'étudier le comportement de f , lorsque x est négatif et tel que $|x|$ prend de grandes valeurs. On dit alors que l'on étudie le comportement de f au voisinage de $-\infty$.
Si $\lim\limits_{-\infty} f=+\infty$ alors il existe un réel B < 0 tel que f(x) > 0 , pour tout x < B.

Si $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$ alors il existe un réel B < 0 tel que f(x) < 0 , pour tout x < B.

Théorème : Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul ,
$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{a-x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-a)^{2n}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-a)^{2n-1}=-\infty$.
Définition : Soit a un réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a\ ,+\infty[$.
On dit que f admet pour limite L *quand* x *tend vers* $+\infty$, si pour tout $\beta>0$, il existe un réel B > 0 , tel que si $x \geq a$ et x > B alors $|f(x) - L|<\beta$.
Définition : Soit a un réel et f une fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\ , a]$.
On dit que f admet pour limite L quand x tend vers $-\infty$, si pour tout $\beta>0$, il existe un réel B < 0 , tel que si $x \leq a$ et x < B alors $|f(x) - L|<|\beta$.
Théorème : Si une fonction admet une limite L en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) alors cette limite est unique. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f=L$ (Respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ *ou* $\lim\limits_{-\infty} f=L$).

Théorème : Si $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$ *alors* $\lim\dfrac{1}{f}=0$. Si $\lim\limits_{+\infty} f=-\infty$ *alors* $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{f}=0$.

Si $\lim\limits_{-\infty} f=+\infty$ *alors* $\lim\limits_{-\infty}\dfrac{1}{f}=0$. Si $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$ *alors* $\lim\limits_{-\infty}\dfrac{1}{f}=0$.
Pour tout réel a et tout entier non nul n,
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x-a}}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{a-x}}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x-a)^n}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{(x-a)^n}=0$.

Définition : Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère. Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, on dit que la droite d'équation y = L est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$. Lorsque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, on dit que la droite d'équation y = L est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$, à droite en a si, pour tout A > 0, il existe α > 0 tel que si x appartient à I et 0 < x – a < α alors f(x) > A. on note $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim_{a^+} f = +\infty$.
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$, à gauche en a si, pour tout A > 0, il existe α > 0 tel que si x appartient à I et 0 < a – x < α alors f(x) > A. On note $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim_{a^-} f = +\infty$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.
On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$, à droite en a (respectivement à gauche en a) si la fonction – f a pour limite $+\infty$, à droite en a (respectivement à gauche en a).

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en a si $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = +\infty$. On note $\lim_{a} f = +\infty$.
On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ en a si $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = -\infty$. On note $\lim_{a} f = -\infty$.
Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul, on a

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^{2n}} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^{2n-1}} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^{2n-1}} = +\infty.$$

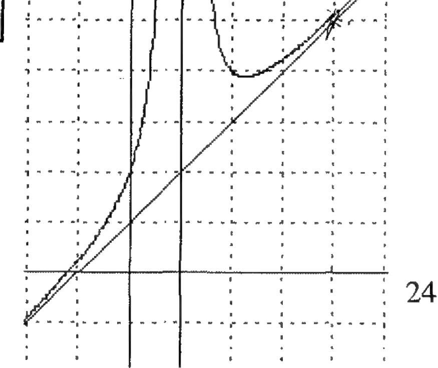
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Si la limite de f, à droite en a (respectivement à gauche en a), est infinie, on dit que la droite d'équation x = a est une asymptote verticale à la courbe C_f à droite en a (respectivement à gauche en a).

Théorème : La limite d'une fonction polynôme, quand la variable tend vers l'infini, est la même que celle de son terme de plus haut degré.
La limite d'une fonction rationnelle, quand la variable tend vers l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degrés.

Théorème : Soit f une fonction positive, a fini ou infini et L un réel.
Si $\lim_{a} f = L$ alors $\lim_{a} \sqrt{f} = \sqrt{L}$. Si $\lim_{a} f = +\infty$ alors $\lim_{a} \sqrt{f} = +\infty$.

Définition : Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Lorsque $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$, on dit que la droite d'équation y = αx + β est une asymptote oblique à la courbe C_f de f au voisinage de $+\infty$. Lorsque $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$, on dit que la droite d'équation y = αx + β est une asymptote oblique à la courbe C_f de f au voisinage de $-\infty$.

LES EXERCICES



Exercice 1 : A)Soit C_f la courbe d'une fonction f définie sur $IR/\{1\}$
Cocher la ou (les) réponse(s) correcte(s)
1)*a*) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$; *b*) $\lim_{x\to1} f(x) = +\infty$; *c*) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
d) $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$

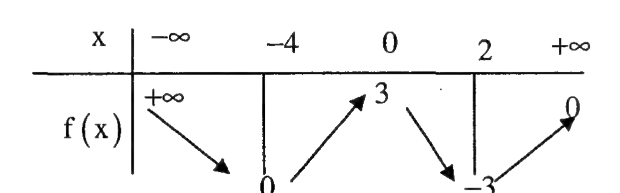
2) a) la droite d'équation : $x=1$ est une asymptote à C_f.

b)la droite d'équation: $y=1$ est une asymptote à C_f. c)la droite d'équation: $y=x+1$ est une asymptote à C_f

B) le tableau des variation ci-contre d'une fonction f

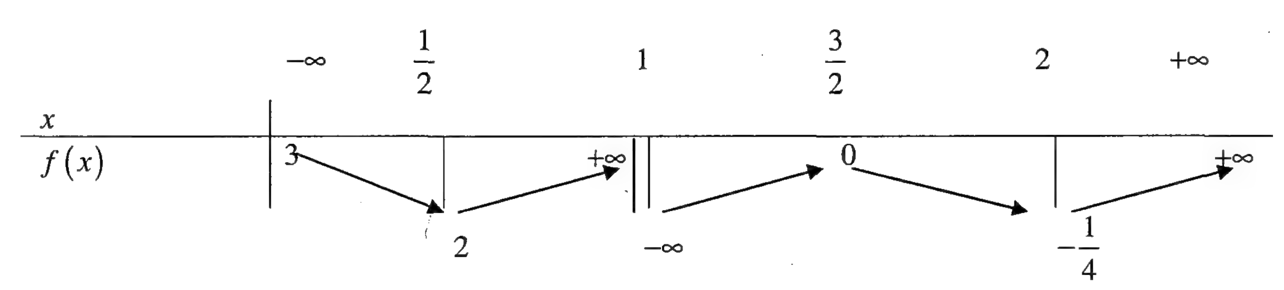
1)a) L'équation $f(x)=-4$ admet au moins une solution

b) ζ_f admet une asymptote verticale c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=-\infty$



2) Si f est la fonction définie par $f(x)=\frac{\sqrt{4+x}-2}{2x}$ alors ζ_f coupe la droite $\Delta: y=x-3$ au moins en un point d'abscisse α dans l'intervalle :a) $]1;2[$; b) $]6;7[$; c) $\left]\frac{9}{4};5\right[$

Exercice 2 : Soit le tableau des variations ci-dessous d'une fonction f :



et On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$.

A) L'une des réponses suivantes est correcte. Laquelle ?

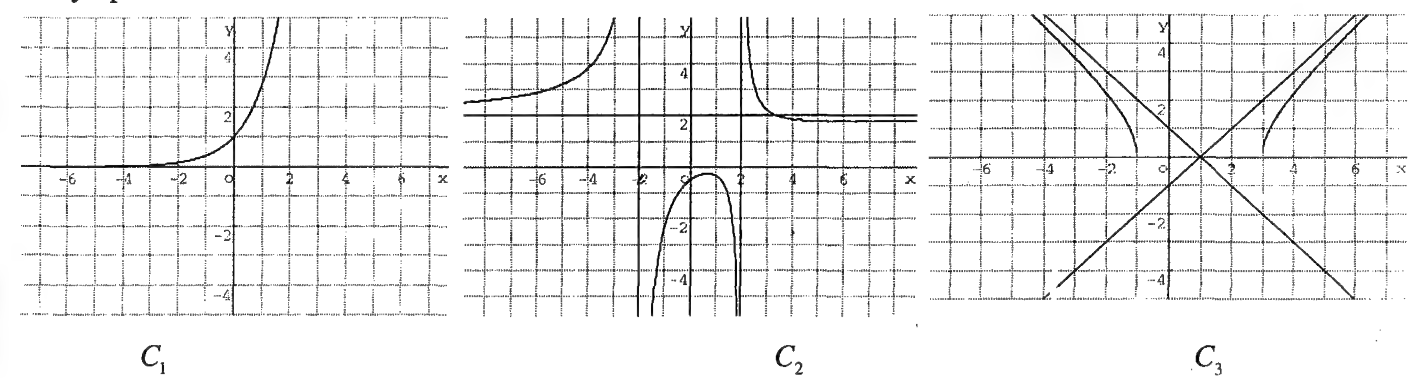
1) le nombre des extrémums de f est : $a)1$; $b)2$; $c)3$; $d)4$

2) le nombre des asymptotes de C_f est : $a)1$; $b)2$; $c)3$; $d)4$.

B) Répond par vrai ou faux en justifiant la réponse :1) la droite d'équation $x=3$ est une asymptote à C_f

2) la droite d'équation $y=1$ est une asymptote à C_f 3) la droite d'équation $y=x$ est une asymptote à C_f

Exercice 3 : Dans la figure ci-dessous, C_1 , C_2 , C_3 sont les représentations graphiques de trois fonctions f_1 , f_2 , f_3 respectivement . par lecture graphique, Donner pour chacune de ces fonctions : le domaine de définition les limites aux bornes du domaine de définition et la nature et une équation de chacune des asymptotes



C_1 C_2 C_3

Exercice 4 : Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, 2) $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$, 3) $f(x)=\frac{1+2x}{1-3x}$, 4) $f(x)=\frac{x-6}{(2x-1)^2}$, 5) $f(x)=\frac{1+3|x|}{1-|x|}$

6) $f(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt{x}$, 7) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

Exercice 5 : Calculer les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4-x-1$, 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^3+x$,

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{3x-1}{x+1}}$, 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$, 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\sqrt{2x}$, 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{(x+1)^5}$, 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}-1}+x^2$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^3+5x}{x-3}$, 9) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+}\frac{-1}{\sqrt{3x-1}}$

Exercice 6 : Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions suivante1)

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}$; 2) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$, 3) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+}\left|2+\frac{x-1}{\sqrt{3x-1}}\right|$; 4) $f(x)=\left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right|$

Exercice N° 7 : La courbe (ξ) ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé du plan.

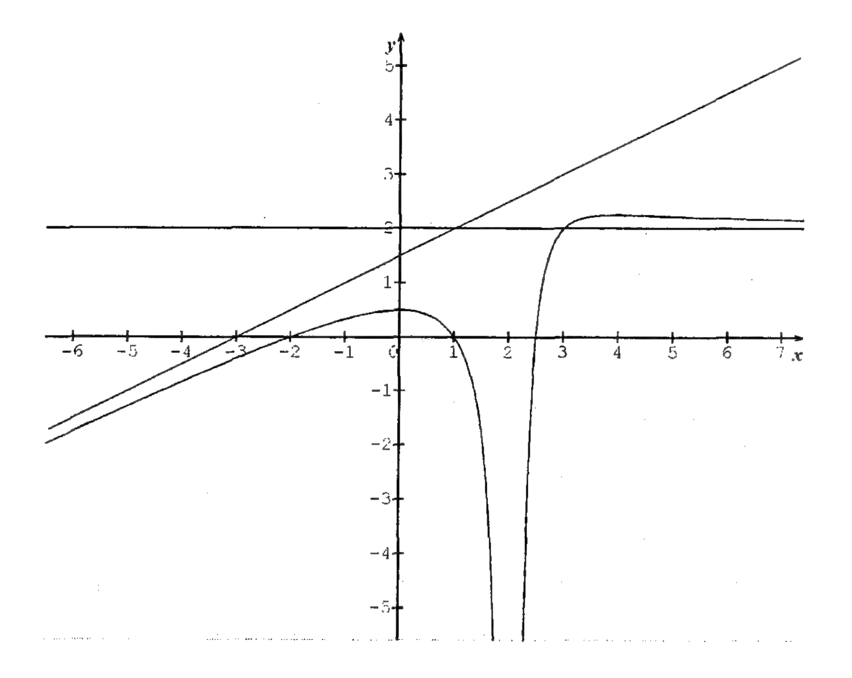
1) a) Déterminer le domaine de définition de f ;

b) Préciser les asymptotes de la courbe (ξ)

2) Déterminer chacune des limites suivants : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

3) Calculer chacune des limites suivantes $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\frac{1}{2}x$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2-x}{f(x)-2}\right)$; $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{4-x}{f(x)}$



Exercice 8 : On considère la fonction $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-2}$.

1)Déterminer le domaine de définition de f.

2)Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

3)Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$. 4)Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-1$.

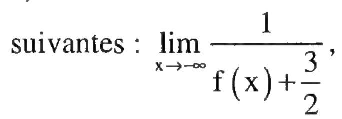
5)En déduire une asymptote à la courbe de f.

Exercice n°9 : La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé du plan :

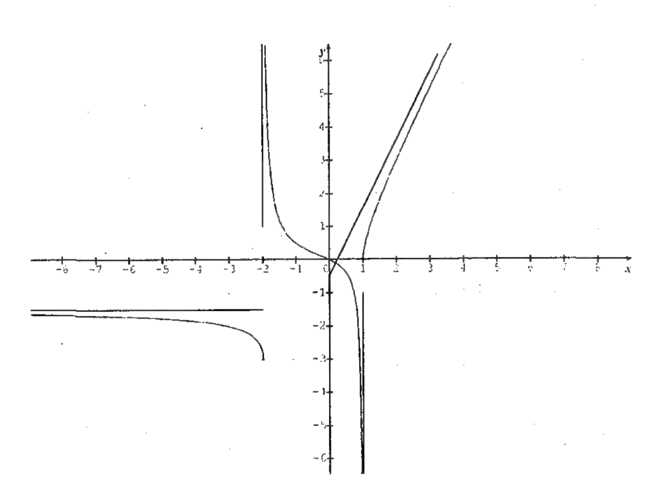
1) a- Déterminer le domaine de définition de f.

b- Déterminer l'image par f de l'intervalle [-2 ;0].

2) Déterminer chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(2x-\frac{1}{2}\right)\right]$.

3) Calculer chacune des limites suivantes :  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)+\frac{3}{2}}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{2x-\frac{1}{2}-f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x+1}{f(x)+x}$.



Exercice10 : On considère la fonction $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$

1)Déterminer le domaine de définition de f. 2)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

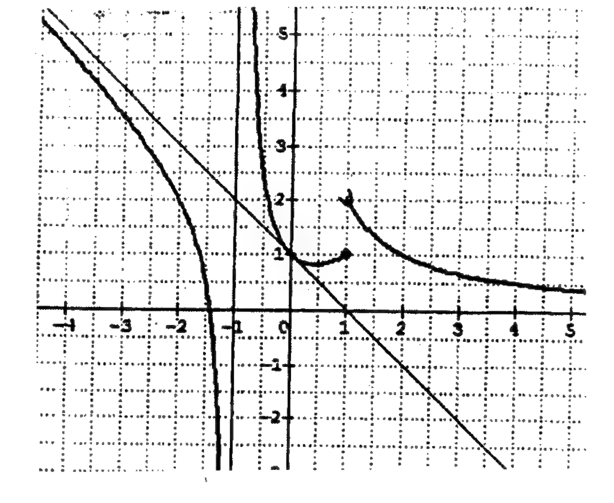
3)Montrer que pour tout $x>0$, *On a* : $f(x)-x=\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$.

4)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$ et déduire une asymptote à la courbes représentative de f au voisinage de $+\infty$.

5)Dire pourquoi la droite d'équation $\Delta: y=-x-1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de l'infini.

6)Etudier la position relative de la courbe de f et la droite Δ sur $]-\infty;0]$.

Exercice N° 11 : Soit f une fonction définie sur $IR\setminus\{-1\}$ dont la courbe représentative (ξ) est donnée ci-contre :



- La droite d'équation $y=-x+1$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $(-\infty)$
- La droite d'équation $x=-1$ est une asymptote à (ξ)
- La droite d'équation $y=0$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $(+\infty)$
- Pour tout $x>1$; $f(x)>0$
- $f(0)=f(1)=f(2)=1$

En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :

1) f est-elle continue en 1 ?

2) Déterminer, en justifiant, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$; d) $\lim\limits_{x\to-1} |f(x)|$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)-1}{f(x)}$; f) $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{f(x)}{f(x)-1}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)-2x}{x+1}$

Exercice 12 Soit la fonction définit par $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x^2+1} \text{ si } x\le 0 \\ \frac{x^2+x}{x^2-x} \text{ si } x>0 \end{cases}$

1/ Déterminer le domaine de définition de f

2/a)Montrer que f est continue en 0 .b) Etudier la continuité de f sur son domaine de définition

3/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ interpréter les résultats obtenus

4/ Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ interpréter les résultats obtenus

5/ a-Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ interpréter les résultats obtenus

b- Montrer que la droite D d'équation y=2x est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

c- Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à D sur $]-\infty,0]$

Exercice N° 13: Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+x+1} & \text{si } x\le -1 \\ f(x)=\frac{2x\sqrt{x+2}+2}{x+1} & \text{si } x>-1 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue en -1

2) a) Montrer que pour tout réel $x>-1$; $f(x)=\left(\frac{2x}{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{x}\right)$.b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$

b) En déduire que (C) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique D que l'on déterminera.

c) Etudier la position de (C) par rapport à D sur l'intervalle $]-\infty;-1]$

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{f(x)}{f(x)-1}$

Exercice 14 : On considère la fonction $f(x)=\frac{x^3-x^2-x+5}{(x-1)^2}$

1)Déterminer D_f.

2)Trouver trois réels a , b et c tels que, pour tout $x\neq1$, on ait : $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}$

3)Déterminer une équation de l'asymptote oblique à C_f.

4)Etudier la position de C_f par rapport à son asymptote oblique.

Exercice 15 : Soit la fonction $f(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-2}$

C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1)Vérifier que pour tout $x \neq 2$ on a : $f(x)=x-1+\dfrac{4}{x-2}$.

2)En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique Δ au voisinage de ∞

3)Étudier la position relative de Δ *et* C_f.

<u>Exercice 16 :</u> Soit la fonction $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$, C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

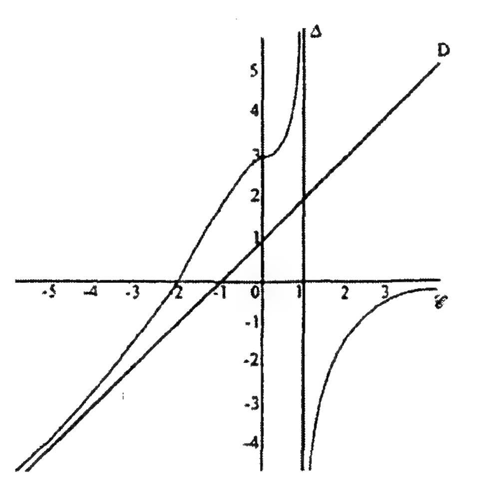
1)Déterminer le domaine de définition de f.

2)Monter que la droite $\Delta : y=x-1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

3)Monter que la droite $\Delta' : y=-x+1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.

4)Étudier la position relative de C_f par rapport à Δ *et* Δ'.

<u>Exercice N°17 :</u> La courbe ξ représentée ci-contre est celle d'une fonction définie sur $IR \setminus \{1\}$ L'axe des abscisses et les droites D et $\Delta : x=1$ sont des asymptotes à ξ





1) a) Déterminer $f\left([-2;+\infty[\right)$

b) Déterminer une équation de l'asymptote à ξ au voisinage de $-\infty$

2) Soit $g=\dfrac{1}{f}$

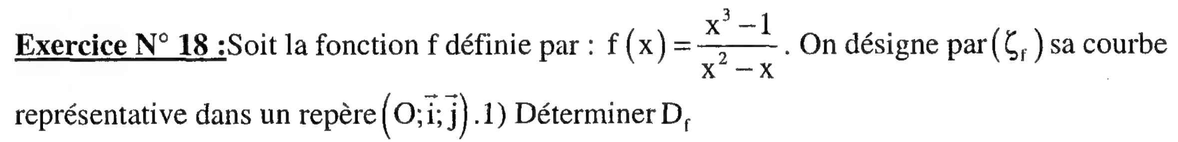
a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Montrer que g est prolongeable par continuité en 1.

c) Etudier la limite de g en (-2) ;

d) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

e) Montrer que g est décroissante sur $[0;1[$



<u>Exercice N° 18 :</u>Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-x}$. On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.1) Déterminer D_f

2) a) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

b) Montrer que pour tout réel $x \in D_f$, on a : $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x}$.

c) i) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)$

ii) Etudier la limite de f au voisinage de 0. iii) Déterminer alors toutes les asymptotes qu'admet (ζ_f)

d) f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

3) Montrer que l'équation $f(x)=x^2$ admet dans $\left[\sqrt{2};2\right]$ au moins une solution α.

4) Soit la fonction g définie par $g(x)=f(x)+ax+b$ où a et b sont deux réels.

a) Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g (ζ_g) admette au voisinage de $(+\infty)$ la droite Δ d'équation $y = 2$ comme une asymptote horizontale.

b) Dans la suite on prend $a = -1$ et $b = 1$.

Soit h la fonction définie par $h(x) = \begin{cases} \sqrt{f(x)} + 1 & \text{si } x \geq \alpha \\ \dfrac{x^3+1}{g(x)} & \text{si } x < \alpha \end{cases}$; (α donnée dans la question 3)

Montrer que h est continue en α.

<u>Exercice 19 :</u> On considère les fonctions suivantes : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - 2x}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x-1}$.

1)Déterminer les domaines de définition des deux fonctions.

2)a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

b) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x} - 2x - 1}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2x}{\sqrt{x} - 1}$

3) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$, Interpréter graphiquement le résultat.

<u>Exercice 20 :</u> Soit la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+5} - 2x + 1 & si \quad x < 2 \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

1)Déterminer D_f. 2)Montrer que f est continue en 2.

3)Montrer que la courbe de f admet un asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

4)a) Vérifier que $f(x) = -x\left(\sqrt{1 + \dfrac{5}{x^2}} + 2 - \dfrac{1}{x}\right)$ $\forall\ x \in]-\infty\,;2[$. b)En déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

5) On considère la fonction $h(x) = f(x) + 3x$; $x \in]-\infty\,;2[$. a) Vérifier que $h(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2+5} - x} + 1$.

b)En déduire que la droite $\Delta : y = -3x + 1$ est un asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

c) Etudier la position de C_f et Δ *sur* $]-\infty\,;2[$

<u>Exercice 21:</u> Soit la fonction f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x(x-1)} & \text{si} \quad x < 1 \\ \sqrt{x^2+3} + ax & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) a/ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

b/ Montrer que la droite d'équation y = 1 est une asymptote à ζ_f en voisinage $-\infty$

3) Déterminer a pour que f soit continue en 1

4) on prend a = -3 . a/ Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a : $f(x) = x\left(\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2}} - 3\right)$

b/ En déduire que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ c/ Montrer que pour tout $x \geq 1$ $f(x) + 2x = \dfrac{3}{x + \sqrt{x^2+3}}$

d/ En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique Δ au voisinage de $+\infty$.
e/ Etudier la position de (ζ_f) et Δ .

Exercice 22 : On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} + x$, *on désigne par* ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)Déterminer le domaine de définition de f .

2)a/ Montrer que $\forall x \in \left]-\infty, 0\right[$; on a : $f(x) = \dfrac{-4x}{\sqrt{x^2 - 4x} - x}$

b/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat

3)Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x]$

4)Montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique ou voisinage de $+\infty$.

Exercice N° 23: Soit m un paramètre réel et soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{9x^2 + 7x + 3} + mx & \text{si } x \le -2 \\ f(x) = \dfrac{4\left(\sqrt{2 - x} - 2\right)}{1 - |x + 1|} & \text{si } -2 < x \le 1 \\ f(x) = \dfrac{(x - 1)^3}{x^2 + 3x - 4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On désigne par (ξ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition de f ; 2) Etudier la continuité de f en 1

3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 6$ est une asymptote oblique à (ξ) au voisinage de $+\infty$

4) Etudier $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

5) Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en -2.

6) On prend $m = 3$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

EXERCICE N°24:

I) Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1 - x^3}{x^2 + x - 2}$ et soit (C_g) sa courbe dans un repère du plan.

1) Déterminer le domaine D_g de la fonction g.

2) a) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

b) Calculer : $\lim\limits_{x \to (-2)^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to (-2)^+} g(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3)a)Montre que g est prolongeable par continuité en 1. Définir son prolongement h par continuité en 1 . b) Montrer que h est continue sur IR \ {-2}.

II) Soit la fonction f définir sur IR \ {-2} par f(x) = $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} - x & si \ x \ge 1 \\ -\dfrac{1 + x + x^2}{x + 2} & si \ x \prec 1 \end{cases}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) Montrer que f est continue en 1.

2) a) Vérifier que pour tout réel $x \in [1,+\infty[$ on a : $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$.

b) Calculer alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que pour tout réel $x \in]-\infty,1[$ on a : $f(x) = -x+1-\dfrac{3}{x+2}$.

b)Montrer que la droite D : y = - x + 1 est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

c) Préciser les positions relatives de (C_f) par rapport à D sur l'intervalle $]-\infty,1[$.

Exercice N°25 : Soit f la fonction définie sur $IR\setminus\{1\}$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} & \text{si } x\in]-\infty;2[\setminus\{1\} \\ f(x)=2x+\sqrt{x^2-4} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

On désigne par ξ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue en 2.
2) Etudier la limite de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu
3) a) Calculer la limite de f en $+\infty$
b) Montrer que la droite $\Delta : y = 3x$ est une asymptote à ξ au voisinage de $+\infty$
4) a) Calculer la limite de f en $-\infty$ .b) Etudier la position relative de ξ_f et la droite $\Delta' : y = 1$ sur $]-\infty;2[$

Exercice 26 :Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2+6x+8}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

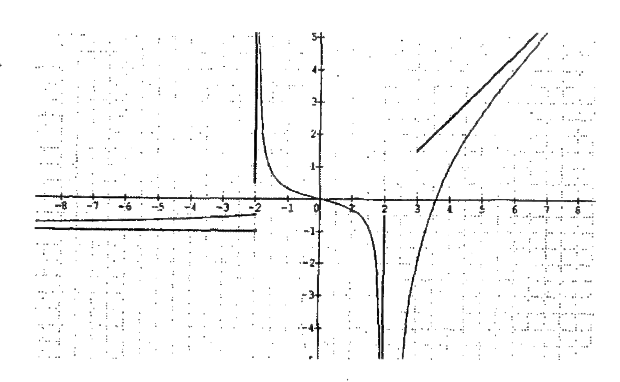
1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+(x+3)\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+3)\right)$

b) En déduire que la courbe (C) admet deux asymptotes obliques au $v(+\infty)$ et au $v(-\infty)$

c) En déduire la position de (C) par rapport a ces asymptotes.

Exercice N° 27 :la courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé du plan



1) Déterminer le domaine de définition de f et préciser les asymptotes de la courbe de f

2) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

3) Calculer chacune des limites suivantes $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{f(x)+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x}{f(x)+3}\right)$



RESUME DU COURS

Définition : La vitesse moyenne entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est le quotient de la distance parcourue par la durée h. La vitesse instantanée à l'instant t_0 est la limite lorsque h tend vers zéro de la vitesse moyenne entre les instants t_0 et $t_0 + h$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

On dit que f est dérivable en a , s'il existe un nombre réel ℓ tel que : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$ Ou encore $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$. Le réel ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en a et il est noté f '(a).

Conséquence : Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. f est dérivable en a , si et seulement si , la courbe représentative de f admet au point M (a , f(a)) une tangente de pente un nombre réel.Cette tangente est d'équation

y = f'(a)(x – a) + f(a).Un vecteur directeur de cette tangente est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ f'(a)\end{pmatrix}$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a .

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors le réel f(a)+ f'(a) h est une approximation affine de f(a + h) et on écrit f(a +h) ≈ f(a)+f'(a)h , pour h voisin de zéro. Le taux de production moyen entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est le rapport $\frac{q(t_0+h)-q(t_0)}{h}$. Le taux de production instantané à l'instant t_0 est la limite, lorsque h tend vers zéro, du taux de production moyen entre les instants t_0 et $t_0 + h$.

Théorème : Toute fonction constante est dérivable en tout réel a .
La fonction $x \mapsto x$ est dérivable en tout réel a .
La fonction $x \mapsto \alpha x + \beta$ est dérivable en tout réel a .
La fonction $x \mapsto (x-\alpha)^2 + \beta$ est dérivable en tout réel a .
La fonction $x \mapsto \frac{1}{\alpha x+\beta}$ est dérivable en tout réel $a \neq -\frac{\beta}{\alpha}$
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout réel a > 0.

Opérations algébriques sur les fonctions dérivables en a : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I , a un réel de I , α et β deux réels.
* Si f et g sont dérivables en a alors les fonctions f + g , fg , αf + βg sont dérivables en a et on a
(f + g)' (a) = f'(a) + g'(a) , (fg)' (a) = f'(a)g(a) + g'(a))f(a) ,
(αf + βg)' (a) = αf' (a) + βg' (a).
* Soit K un entier naturel strictement supérieur à 1 . Si la fonction f est dérivable en a alors la fonction f^k est dérivable en a et on a $(f^k)'(a) = kf'(a)\, f^{k-1}(a)$.
* Si a est un réel et f une fonction polynôme définie par $f(x) = b_0 + b_1x + b_2 x^2 + ... + b_k x^k$ alors f est dérivable en a et on a $f'(a) = b_1 + 2b_2a + ... + kb_ka^{k-1}$.
Si f et g deux fonction définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

Si f et g sont deux fonctions dérivables en a et si f ne s'annule pas en a alors les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{g}{f}$ sont dérivables en a et on a

$\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=\frac{-f'(a)}{(f(a))^2}$, $\left(\frac{g}{f}\right)'(a)=\frac{g'(a)f(a)-g(a)f'(a)}{(f(a))^2}$.

Théorème : Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.Si f est une fonction dérivable en a et si f(a) > 0 , alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable en a et on a $\left(\sqrt{f}\right)'(a)=\frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}$.

Définition : * Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme]b , a].
On dit que f est dérivable à gauche en a , si le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0^-.
Cette limite est alors notée $f'_g(a)$ et est appelée le nombre dérivé de f à gauche en a.
* Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [a , b [.
On dit que f est dérivable à droite en a , si le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0^+.
Cette limite est alors notée $f'_d(a)$ et est appelée le nombre dérivé de f à droite en a.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
La fonction f est dérivable en a si , et seulement si , f est dérivable à droite et à gauche et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Conséquence : Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
* f est dérivable à droite en a , si et seulement si , la courbe représentative de f admet au point A (a , f(a)) une demi – tangente déterminée par $y = f'_d(a)(x-a)+f(a)$, $x \geq a$.
Un vecteur directeur de cette demi tangente est $\vec{u}_d\begin{pmatrix}1\\ f'_d(a)\end{pmatrix}$.
* f est dérivable à gauche en a , si et seulement si , la courbe représentative de f admet au point A (a , f(a)) une demi - tangente déterminer par $y = f'_g(a)(x-a)+f(a)$, $x \leq a$.
Un vecteur directeur de cette demi – tangente est $\vec{u}_g\begin{pmatrix}-1\\ -f'_g(a)\end{pmatrix}$.

Définition : * Soit a et b finis ou infinis.
On dit que la fonction f est dérivable sur]a , b [si f est dérivable en tout réel de]a , b [
* Soit a un réel et b fini ou infini. On dit que la fonction f est dérivable sur [a , b [si f est dérivable sur]a , b [et si elle est dérivable à droite en a .
* Soit a fini ou infini et b un réel. On dit que la fonction f est dérivable sur] a , b] si f est dérivable sur]a , b [et si elle est dérivable à gauche en b .
* Soit a et b deux réels. On dit que la fonction f est dérivable sur [a , b] si f est dérivable sur]a , b [et si elle est dérivable à droite en a et si elle est dérivable à gauche en b .

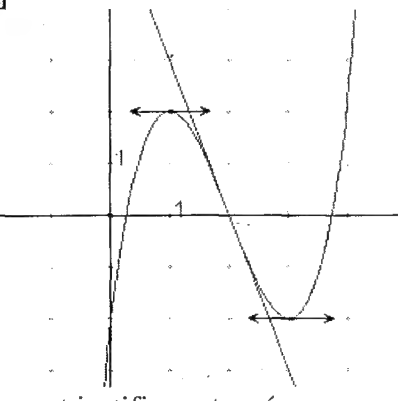
Définition ; Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
Si $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ (ou $-\infty$) alors la courbe représentative de f admet au point M(a , f(a)) une demi – tangente verticale.
Si $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ (ou $-\infty$) alors la courbe représentative de f admet au point M(a , f(a)) une demi – tangente verticale.

LES EXERCICES

Exercice 1 :

Le graphique ci – contre représente une fonction f définie sur IR et dérivable en 1,2et 3 avec les tangentes à C aux points l'abscisse 1, 2, et 3

1) Déterminer graphiquement f(1) , f (2) , f (3)
2) Déterminer graphiquement f' (1), f' (2), f' (3)



Exercice 2 : Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse et justifier votre réponse :

1) f continue en a alors f est dérivable en a .
2) f est continue en a alors f n'est pas dérivable en a .
3) f n'est pas continue en a alors f n'est pas dérivable en a.

Exercice 3 : Etudier la dérivabilité de chacune des fonctions suivantes au point d'abscisse a et donner l'équation de la tangente ou demi tangente à la courbe de (f) dans un repère (O , i , j) .

1) $f(x) = 2x^3 - 4x + 3$; a = 1 ; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x+2}$; a = -2

3) $f(x) = x - \sqrt{2x+1}$; a = 4 ; 4) $f(x) = |1 - x^2|$; a = -1

Exercice 4 : Soit $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si\ x \geq -1 \\ -2x & si\ \ x < -1 \end{cases}$

1) Calculer les limites suivantes et conclure : $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1}$ *et* $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1}$

2) f est elle dérivable en -1
3) donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 .

Exercice 5 : Soit $f(x) = \sqrt{1-2x}$

1) Montrer que f et dérivable en tout point a de $\left]-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right[$ et calculer f '(a) .

2) Etudier la dérivabilité de f en $\dfrac{1}{2}$ et calculer $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

3) On pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

a/ Etudier la dérivabilité de g en tout point de son ensemble de définition.

b/ g est elle dérivable en $\dfrac{1}{2}$.

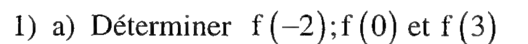
Exercice 6:1) Soit deux fonctions f et g dérivables sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

Montrer que si f(a) = g(a)=0 et g'(a) ≠ 0 alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$

2) Calculer les limites suivantes : a/ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 2}$; b/ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{2x - 6}$

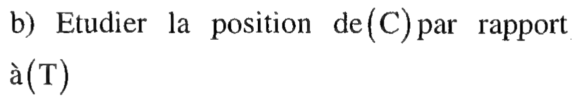
c/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+2}-\sqrt{2}}{x}$; d/ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{(x+3)\left(\sqrt{x-2}-1\right)}$

Exercice N°7 : La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $IR\setminus\{-3\}$

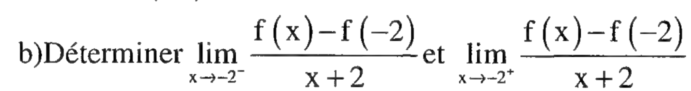

1) a) Déterminer $f(-2);f(0)$ et $f(3)$;

b) Déterminer $f'(0)$ et $f'(3)$

2) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 3.


b) Etudier la position de (C) par rapport à (T)

3) a) f est-elle dérivable au point d'abscisse (-2) ? Justifier.


b) Déterminer $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$

4) Déterminer par leurs équations toutes les asymptotes à la courbe (C)

Exercice 8 : $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et les fonctions $f(x)=x^2-3x+\dfrac{5}{4}$;

$g(x)=\dfrac{3(3x+5)}{4(x+3)}$ ζ et ζ' les courbes respectives de f et g dans $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$

1) Montrer que ζ et ζ' rencontrent l'axe des ordonnées en un même point A.

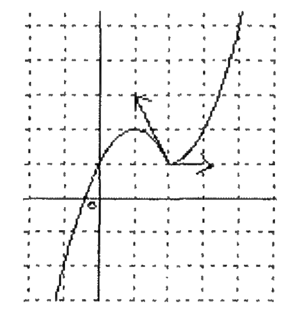
2) Montrer que les tangentes en A aux courbe ζ et ζ' sont perpendiculaire

Exercice 9 :

Le graphique ci contre représente une fonction f définie sur R :

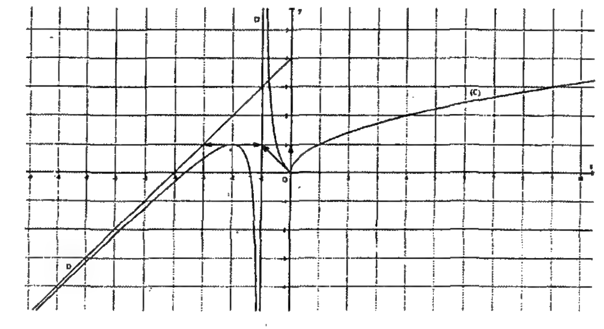
1) f est – elle dérivable en 2 ?

2) Déterminer graphiquement $f'_d(2)$ et $f'_g(2)$



Exercice N° 10: La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $IR\setminus\{-1\}$.

Les droites D et D' sont les asymptotes à la courbe (C).



1) Déterminer :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

2) a) Déterminer $f(-2)$ et $f'(-2)$.

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse (-2)

c) Déterminer une approximation affine de $f(-1.999)$

3) Déterminer $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ et $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$

Exercice 11 : 1) Montrer que la fonction $f(x)=x^2\sqrt{|x|}$ est dérivable en 0 et déterminer f'(0)

2) soit la fonction $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}x^2-x+\frac{11}{5} & si \quad x<3\\ \frac{2x-1}{x+2} & si\ x\ \geq 3\end{cases}$

a)Montrer que g est continue en 3 . b) g est – elle dérivable en 3

Exercice 12 : Soit la fonction $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ;\ si\ x\neq 0\\ f(0)=a & ;\ a\in IR\end{cases}$

1) Déterminer D_f. 2) Déterminer a pour que f soit continue en 0. 3) Pour a trouvé f est elle dérivable en 0.

Exercice 13 : Soit la fonction $f(x)=\sqrt{x^4+3x^2+2}$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Montrer que f est dérivable en tout réel a et déterminer f'(a) .3) En déduire : $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^4+3x^2+2}-\sqrt{6}}{x-1}$

Exercice 14 : Soit la fonction $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & si\ -2\leq x<2\\ x^2+x-\frac{1}{2} & si\ \ 2\leq x\leq 3\\ ax+b & si\ \ x>3\end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 2.2) Peut-on déterminer a et b tel que f soit dérivable en 3
3) Etudier la dérivabilité à droite en -2

Exercice N°15 :

I) Soit la fonction g définir sur IR par $g(x)=2x^2+x+1$.

1) Calculer le nombre dérivé de g en tout réel a.
2) Déterminer l'abscisse du point où la tangente est parallèle à la droite $\Delta : y=5x$.

II) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$; on désigne par (ζ_f) la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-2x+1} & si\ x<0\\ g(x) & si\ x\geq 0\end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 0.
2) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0.
b) Déterminer une équation de la demi tangente T à (ζ_f) à gauche au point d'abscisse 0.
3) a) Déterminer $f'_d(0)$
b) Déterminer une équation de la demi tangente T' à (ζ_f) à droite au point d'abscisse 0.
4) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Expliquer.
5) Tracer les demi tangentes à (ζ_f) au point d'abscisse 0, ainsi que (ζ_f)

Exercice 16: Soit la fonction définie sur $IR/\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{1-x^6}{1-x}$

1) Montrer que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$.
2) soit $a \neq 1$, déterminer de deux manières $f'(a)$.
3) Montrer que pour tout $x \neq 1$ on a : $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 = \dfrac{1-6x^5+5x^6}{(1-x)^2}$

Exercice 17 : Soit h un réel proche de zéro. Montrer que :
1) $(1+h)^2 \simeq 1+2h$; 2) $(1+h)^4 \simeq 1+4h$
3) $(1+h)^n \simeq 1+nh$, $(x \geq 2)$; 4) $\sqrt{1+h} \simeq 1+\frac{1}{2}h$; 5) $\dfrac{1}{1+h} \simeq 1-h$

Exercice 18 : Soit la fonction $f(x)=\sqrt{3x+1}$
1) Déterminer l'approximation affine de f proche de 0
2) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{1,00048}$

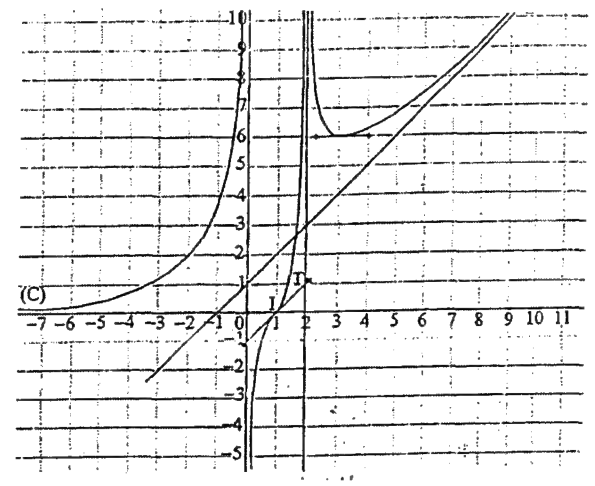
Exercice 19 : Soit la fonction $f(x)=(1+x)^n$, $n \in IN^*$
1) Donner une approximation affine de f voisin de 0 En déduire une valeur approche de $(1,0002)^5$

Exercice 20 : Soit la fonction définie sur $IR/\{-5\}$ par $f(x)=\dfrac{2}{x+5}$.
1) Déterminer une approximation affine de f voisin de -1
2) Montrer que pour $-1 \leq h \leq 1$ l'erreur commise en remplaçant $f(-1+h)$ par $f(-1)+h\,f'(-1)$ est majorée par $\dfrac{1}{24}h^2$.

Exercice 21 : Soit la fonction $f(x)=\sqrt{4x+5}$
1) Déterminer le nombre dérivé en 5 . 2) Estimer $\sqrt{25,0004}$
3) comparer le résultat avec celui affiché par la calculatrice
4) Donner une approximation de $\sqrt{4,008}$. Quelle est la valeur réelle ?

Exercice N°22 : La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $IR \setminus \{0;2\}$

La droite des abscisses, a droite des ordonnées et les droites Δ et Δ' sont des asymptotes à la courbe ξ



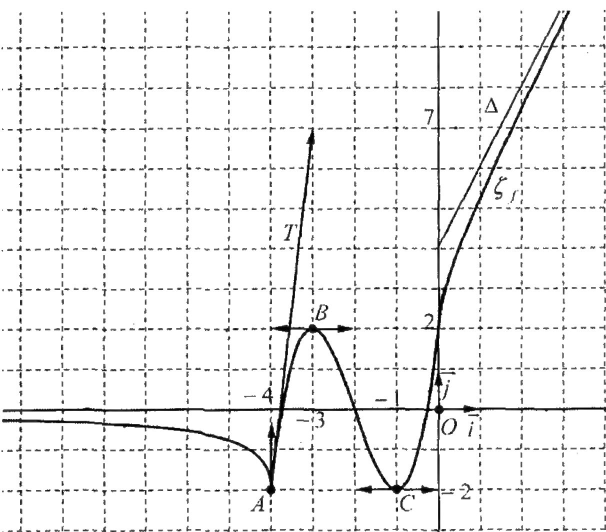
1) Déterminer l'équation de chacun des asymptotes Δ et Δ'
2) Détermine : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$;
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x-1)$
$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-6}{x-3}$
3) a) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$;
b) Déterminer une équation de la tangente (T) à ξ au point I
c) Etudier la position de ξ par rapport à (T) ;

Exercice n°23 : Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée C_f dans un repère

orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On sait que :

- La droite Δ d'équation : y = 2x + 4 est une asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.
- La droite d'équation : y = 0 est une asymptote à la courbe C_f en $-\infty$.
- La courbe C_f admet une tangente parallèle l'axe des abscisses aux points B(-3 ;2) et C(-1 ;-2).
- La courbe C_f admet une demi tangente T et une demi tangente verticale au point A(-4 ;-2).

A partir du graphique et des renseignements fournis :



1)Déterminer

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]$.

2) Déterminer $f'(-1)$ et $f'(-3)$.

3) a) Déterminer $f'_d(-4)$

b)f est elle dérivable ç gauche en -4 ? Justifier.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to-4} \frac{f(x)-f(-4)}{x+4}$.

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^2f(x)$.

a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-1} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=4$

b) Donner alors une équation cartésienne de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse -1.

Exercice 24: Soit la fonction $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3+x^2-x-\frac{3}{2} & si\ \ x<-1\\ \frac{x^2-x-2}{|x|+1} & si\ \ -1\le x\le 2\\ \sqrt{x^2+5}-(x+1) & si\ \ x>2\end{cases}$

1) Montrer que f est dérivable en -1 . 2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et 2 .

3) (ζ) la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .a/ Calculer f'(x_0) , $x_0 \in \left]-\infty, -1\right[$

b/ Ecrire une équation de la tangente Δ à (ζ) au point d'abscisse (- 2)

c/ Déterminer un réel $x_0 \in \left]-\infty, -1\right[$ tel que la tangente à ζ au point d'abscisse x_0 soit parallèle à la droite d'équation D : 5x + 8 y + 1 = 0 .

Exercice 25 :

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan Soit les fonctions, h(x) = $\sqrt{|x|+3}$ et g(x) = $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$

1) Etudier la dérivabilité de h en 0 et interpréter graphiquement le résultat .

2) Construire les courbes de h et g . 3) Résoudre graphiquement $2\sqrt{|x|+3} > x^2+3$

4) soit la fonction K(x) = $\frac{\sqrt{|x|+3}-2}{x^2-1}$ K est elle prolongeable par continuité en 1 et en -1

5) soit la fonction $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|+3} & si\ \ x<-1\\ x(4E(x)+2) & si\ \ -1\le x\le 1\\ \dfrac{2g(x)+4x-8}{x-1} & si\ \ x>1\end{cases}$

a/ Montrer que f est continue en 0 . b/ Etudier la continuité de f en -1 et 1 .
c/ Etudier la dérivabilité de f en -1 et 1 .

Exercice N°26 : Soit la fonction f définie sur IR par $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-1}+x+2 & \text{si } x<-1\\ f(x)=x^2-3x-3 & \text{si } x\ge -1\end{cases}$

On désigne par ξ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.

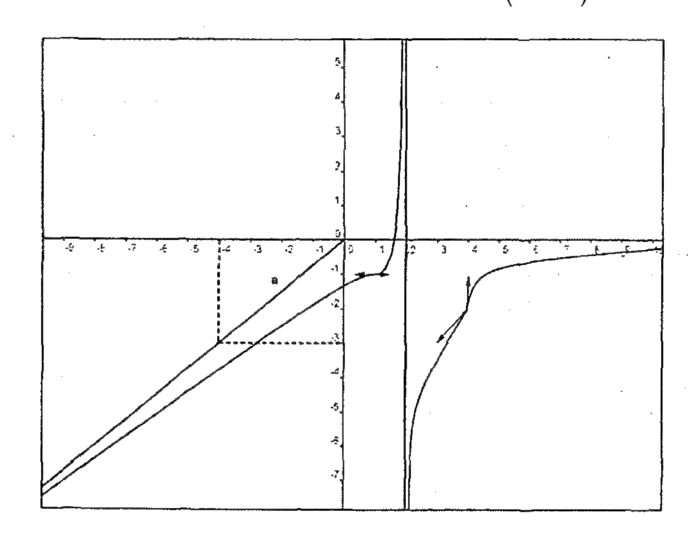
1) Montrer que f est continue sur IR
2) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en (-1)
3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4) On désigne par (ξ_1) la courbe de la restriction de f à $]-1;+\infty[$ et par a un réel de $]-1;+\infty[$
a) Montrer que f est dérivable en a.
b) Ecrire une équation de la tangent à (ξ_1) au point I d'abscisse 2
c) Déterminer le point J de (ξ_1) où la tangente est perpendiculaire à la droite D d'équation $x-3y=0$
d) Déterminer le point K de (ξ_1) où la tangente est parallèle à la droite (IJ).

Exercice N°27 : 1) Soit f une fonction dérivable sur IR et soit a un réel donné

Montrer que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$ .2) En déduire $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{64x-2(2x^2-6)^6}{x-2}$.

3) Soit f une fonction dérivable en x_0 et h un réel. Calculer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

Exercice N° 28: La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$



1) a) Déterminer le domaine de définition de f
b) f est-elle continue sur chacun des intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$?
2) a) Donner les limites aux bornes de D_f ;
b) Déterminer les asymptotes à ζ_f
3) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{f(x)+2}{x-4}$
b) Ecrire l'équation de la demi-tangente à ζ_f à gauche au point d'abscisse 4.
4) a) Déterminer $f(]-\infty;2[)$ et $f([4;+\infty[)$.
b) Montrer que l'équation $f(x)=-\dfrac{3}{2}$ admet une solution unique α dans $]-1;1[$.



RESUME DU COURS

Définition : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I . On appelle fonction dérivée de f et on note f' , la fonction qui à tout réel x appartenant à I , associe le nombre dérivé f'(x) , de f en x .

Théorème : Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I , α et β deux réels .

* Les fonctions f + g , fg , αf + βg sont dérivables sur I et on a $(f+g)' = f' + g'$; $(fg)' = f'g + g'f$; $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

* Pour tout entier naturel $k \geq 2$, la fonction f^k est dérivable sur I et on a $(f^k)' = kf'f^{k-1}$.

En particulier toute fonction polynôme est dérivable sur IR.

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que f ne s'annule pas sur I.

* Les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{g}{f}$ sont dérivables sur et on a : $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$; $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$.

* Pour tout entier naturel $K \geq 1$, la fonction $\frac{1}{f^k}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{1}{f^k}\right)' = \frac{-kf'}{f^{k+1}}$.

Théorème : Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . Alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Théorème : Soit f une fonction dérivable un intervalle I soit α et β deux réels . Alors la fonction $g : x \mapsto f(\alpha x + \beta)$ est dérivable en tout réel x tel que α x + β appartient à I . De plus la fonction g' est définie par $g'(x) = \alpha f'(\alpha x + \beta)$.

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction f est constante sur I , si et seulement si , pour tout x appartenant à I , $f'(x) = 0$.

La fonction f est croissante sur I , si et seulement si , pour tout x appartenant à I , $f'(x) \geq 0$.

la fonction f est décroissante sur I , si et seulement si , pour tout x appartenant à I , $f'(x) \leq 0$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et et a un réel de I .

On dit que f admet un maximum local en a , s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que $f(x) \leq f(a)$, $x \in J$.On dit que f admet un minimum local en a , s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I , tel que $f(x) \geq f(a)$, $x \in J$.

Lorsque f admet un minimum ou un maximum local en a on dit que f un extremum local en a .

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , et a un élément de I .

Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

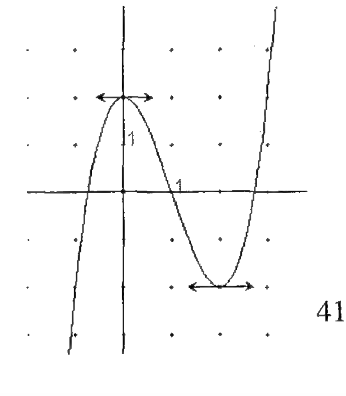
Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , a un réel de I et h > 0 tel que $]a-h, a+h[\subset I$ .Si f' s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a .



LES EXERCICES

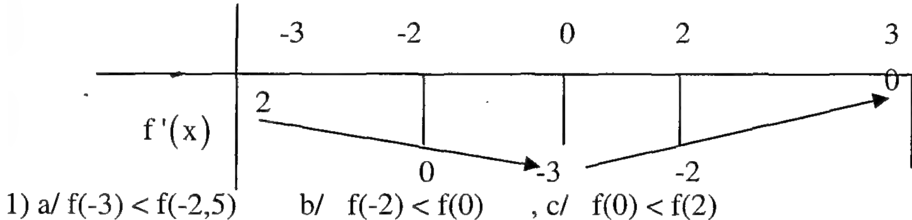
Exercice 1 : La figure ci-contre donne une partie de la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur IR. À l'aide du graphique :1)Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$; 2) Déterminer $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)}{h}$

3)Dresser le tableau de variation de f .



Exercice 2 : Cocher la réponse exacte. Justifier la réponse

Soit f une fonction dérivable sur [-3 , 3] dont le tableau de variation la fonction de f' est :



1) a/ f(-3) < f(-2,5) b/ f(-2) < f(0) , c/ f(0) < f(2)

2) La courbe ζ_f de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d'équation.

a/ y = -1 b/ y = x c/ y = - x

3) si f(-3) > f(3) alors $\forall\ \alpha \in \left]f(3), f(-3)\right[$ l'équation f(x) = α admet dans [-3 , 3].

a) exactement une solution ; b) exactement 2 solutions ; c) pas de solution

4) Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ alors :

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; b) $f'(x) = \sqrt{x}$; c) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

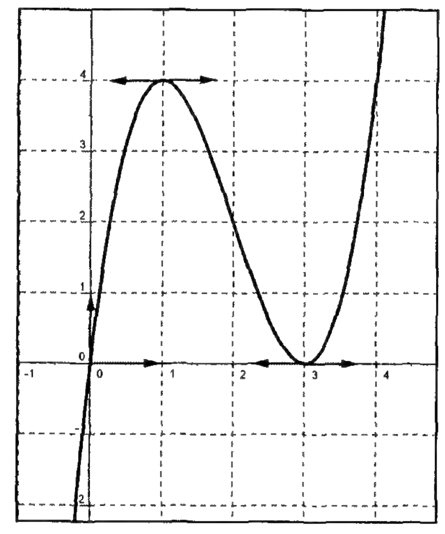
5) Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x^2$ et T la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1 alors une équation de T est :

a) $y = 2x$; b) $y = 2x - 3$; c) $y = 2x - 1$

6) La fonction définie sur IR par $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1}$ est dérivable sur IR et pour tout $x \in$ IR ,

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}}$; b) $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$; c) $f'(x) = \frac{8x}{\sqrt{4x^2+1}}$

Exercice n°3 : La figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe ζ_f admet deux branches paraboliques de direction $(O, \vec{i})$, l'une au voisinage de $+\infty$ et l'autre au voisinage de $-\infty$.



1) À partir graphe dresser le tableau de variation complète de f.

2) Déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

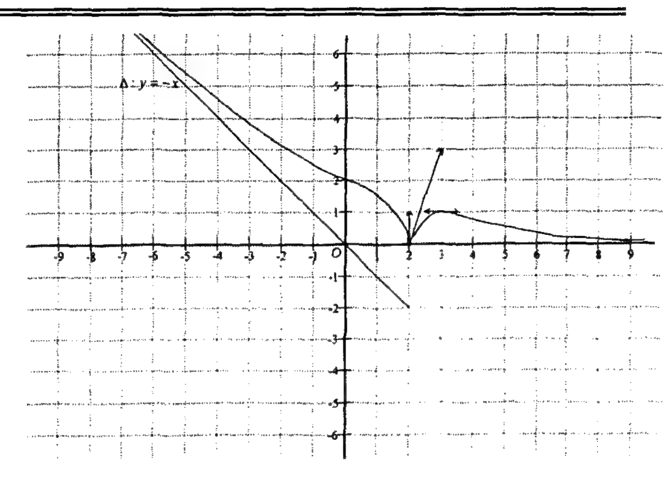
3) Soit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. a/ Préciser l'ensemble de définition D de g.

b/ Montrer que g est dérivable sur D et exprimer sa fonction dérivée en fonction de f' et f

c/ Dresser le tableau de variation de g.

Exercice N° 4 : La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur IR dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La droite $\Delta : y = -x$ est l'asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

En utilisant le graphique :



1) Déterminer $f(3)$; $f'(3)$
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu
3) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$
4) a) Donner le nombre dérivé de f à droite en 2
b) Ecrire l'équation de la demi tangente à la courbe de f à droite en 2.
5) Déterminer $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{f(x)}{x-2}$, f est elle dérivable à gauche en 2.
6) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 5: Déterminer les intervalles sur les quelles f est dérivable et calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = 2x - 1$	2) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$	3) $f(x) = (3x - 4)^3$	4) $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{2x+5}$
5) $f(x) = \sqrt{2x+1}$	6) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$	7) $f(x) = \frac{1}{3x-7}$	8) $f(x) = (x-1)^3(2x-3)^4$.
9) $f(x) = (5x+1)^{-4}$	10) $f(x) = 2x + 3 + \frac{5}{x}$.		

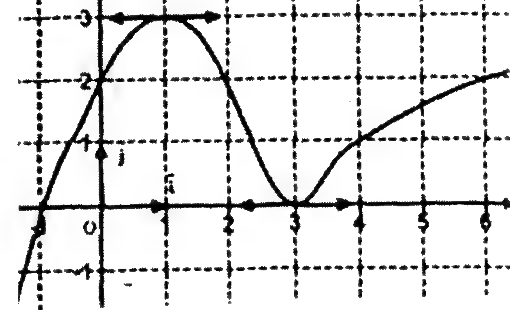
Exercice 6 : Soit la fonction : $f(x) = \frac{|x^2 + x| + 1}{|x| + 1}$

1) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis en -1
2) Déterminer les intervalles sur les quels f est dérivable et calculer f'(x) .

Exercice 7 : Calculer la limite de f en a en utilisant la fonction dérivée : **1)** $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$; $a = 4$

2) $f(x) = \frac{x^2\sqrt{x} - 1}{x - 1}$; $a = 1$ **3)** $f(x) = \frac{\frac{1}{x+4} - 1}{x+3}$; $a = -3$ **4)** $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+1}}$; $a = 0$

Exercice 8 : Soit f une fonction continue et dérivable sur IR et dont la courbe est donnée par la figure ci-contre :



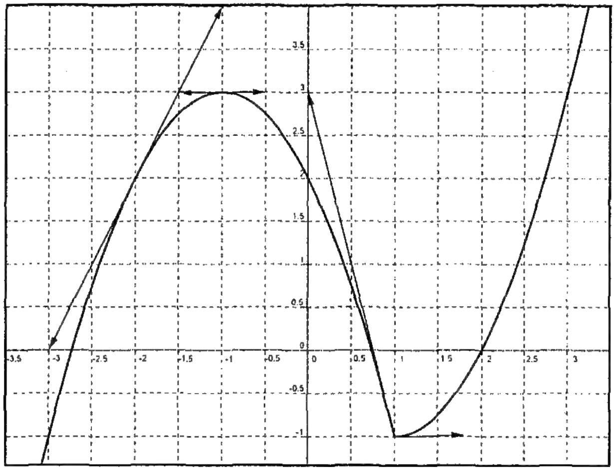
1) Répondre par vrai ou faux
a) 0 est un minimum local de f b) f est dérivable en $a = 1$.
c) La restriction de f sur $[0;2]$ est strictement croissante.
2) Résoudre graphiquement :
a) $f(x) = 0$; b) $f(x) < 0$; c) $f'(x) = 0$
3) a) Dresser le tableau de variation de f sur IR.
b) En déduire le signe de f sur IR.

Exercice n°9 : La figure ci contre est la représentation d'une fonction f.
1) A l'aide du graphique déterminer $f'(-2)$ et $f'(-1)$.
2) Cocher la où les bonnes réponses :

a) f est dérivable :
i) à droite en 1 ii) à gauche en 1 ii)en 1.

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)+1}{x-1}=$ i) -4 ii) -1 iii) 1 iv)4.

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)+1}{x-1}=$ i)$-\infty$ ii)$+\infty$ iii) 0 iv)1.



3)Soit $g(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des réels.

a)Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$

b) Déterminer les réels a, b et c pour que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

$$\begin{cases}\bullet \text{La droite : } y=2x+1 \text{ est la tangente à } \zeta_g \text{ au point d'abscisse } 0.\\ \bullet \text{Les tangentes } \zeta_f \text{ et } \zeta_g \text{ en leurs points d'abscisses } -1 \text{ sont parallèles.}\end{cases}$$

4) Soit $\begin{cases} h(x)=\sqrt{x^2+x}, \text{si } x\geq 0\\ h(x)=\frac{x}{x-1}, \text{ si } x<0\end{cases}$ a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la dérivabilité de h en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que h est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ et calculer $h'(x)$.

Exercice 10 : Dresser le tableau de variation et préciser les extremums éventuels des fonctions suivantes s'ils existent. 1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 2) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ 3) $f(x)=\frac{2x-3}{3x^2-4x}$ 4) $f(x)=| x^2 -4 |$

5) $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ 6) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

Exercice 11 : Soit $f(x)=\frac{x^2+bx+c}{x^2-3x+2}$

Déterminer les réels b et c pour que f admet en 0 un extremum relatif égal à 0 .

Exercice 12 : Soit la fonction $f(x)=\frac{4(a-1)x+2a+2}{4x^2-1}$

1) Déterminer a pour que f admet un seul extremum .2) Déterminer a pour que f n'admet pas d'extremum.
3) Déterminer a pour que f admet un maximum et un minimum.

Exercice 13 :1) Montrer que le polynôme $P(x) = 3x^2-12x +17$ est toujours strictement positif $\forall x \in$ IR .
2) soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x + 4$
a/ Montrer que f est strictement croissante de .
b/ Dresser le tableau de variation de f

Exercice n°14: Sur la figure ci-dessous est tracé la courbe représentative noté (ζ_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On sait que :

La droite Δ : $y = x + 5$ est une asymptote à (ζ_f) en $-\infty$.

La droite Δ : $x = -1$ est une asymptote à (ζ_f) .

La droite Δ : $y = 1$ est une asymptote à (ζ_f) en $+\infty$.

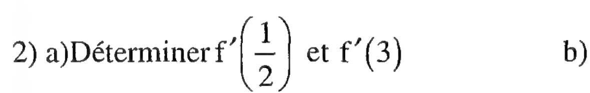
La droite T est la tangente à (ζ_f) au point A.

La courbe (ζ_f) admet une tangente horizontale au point B et deux demi tangentes au point C.

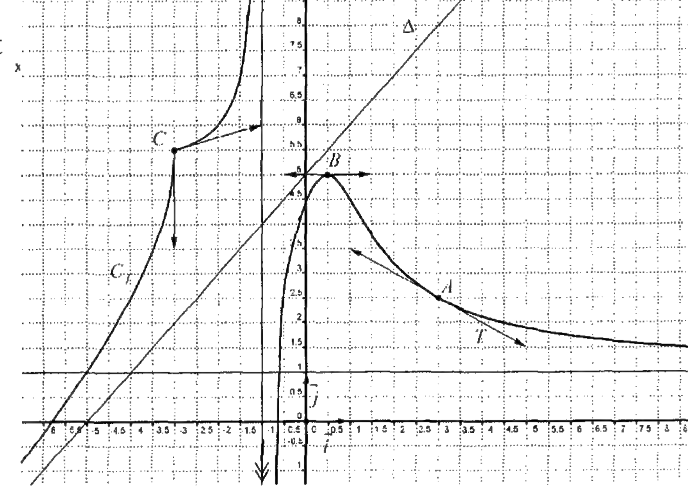
A partir du graphe et des renseignements fournis :

1) Déterminer

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ et



2) a) Déterminer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'(3)$ b) Donner ne approximation du réel f(3,004).



3) a) f est elle dérivable à gauche en -3 ?

Déterminer $\lim\limits_{x\to(-3)^-} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3}$

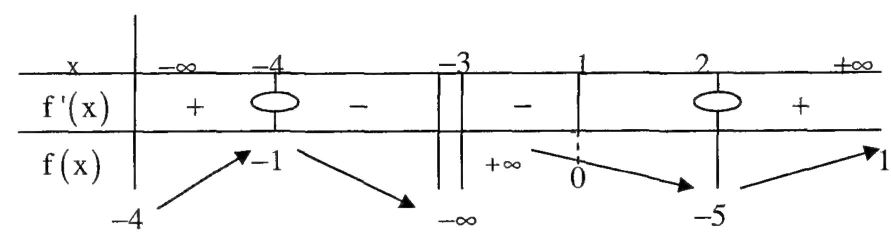
b) Déterminer $\lim\limits_{x\to(-3)^+} \frac{f(x)-5,5}{x+3}$

4) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$

par : $g(x)=\sqrt{f(x)+\frac{3}{2}}$ .a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=-\frac{1}{8}$

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 3.

Exercice 15 : On donne le tableau de variation d'une fonction f .



x	$-\infty$		-4		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	|		0	+	
$f(x)$	-4 ↗		-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↘	-5	↗	1

1) Donner l'ensemble de définition de f et f'. 2) Préciser les asymptotes à la courbe de f.

3) Déterminer les équations des tangentes aux points -4 et 2. 4) Préciser les extremums de f.

Exercice N° 16 Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3+ax^2+bx+1;(a;b)\in IR^2$. On désigne par ξ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer a et b pour que la droite $(T): y=7x-11$ soit tangent à ξ au point d'abscisse 2.

2) On donne $a=-1$ et $b=-1$

a) Dresser le tableau de variation de f ; b) Déterminer les extrema de f.

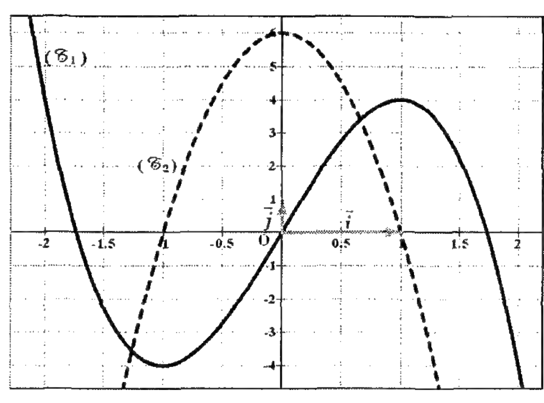
3) a) Vérifier que pour tout $x\in IR$, on a : $x^3-x^2-8x+12=(x-2)^2(x+3)$.

b) Etudier la position de ξ par rapport à la tangente (T).

4) Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x)=x^3-x^2-x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ g(x)=\sqrt{x^2+1} & \text{si } x<0 \end{cases}$

Etudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Exercice n°17 : Le plan est rapporté d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. ζ_1 et ζ_2 sont les courbes représentatives, d'une fonction f dérivables sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f'.
Par lecture graphique :
1) Déterminer, parmi les courbes ζ_1 et ζ_2, celle qui représente la fonction f'.
2) Dresser le tableau de variations de f.



Exercice 18: Soit la fonction f(x) = x². A et B deux points d'abscisses respectives a et b et I le point d'abscisse $\frac{x_A+x_B}{2}$. Montrer que la tangente à la courbe de f au point I est parallèle à (AB) .

Exercice N°19: Soit f une fonction définie sur IR \ {3} par $f(x)=\frac{5-x^2}{x-3}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

2) a) Montrer que $\forall x\in IR\setminus\{3\}$, on a $f'(x)=\frac{-x^2+6x-5}{(x-3)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f ; c) Déterminer les extremums de f

3) a) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Déterminer les points de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite $\Delta: 5x+9y=0$

Exercice20 :Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\frac{ax^2+bx+2}{x-2}$; $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$

1)a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et que $f'(x)=\frac{ax^2-4ax-2b-2}{(x-2)^2}$

b) Déterminer les réels a et b pour que f admet un extremum en 4 sa valeur est 7.

On suppose dans la suite que a = 1 et b = -1

2)a) Dresser le tableau de variation de f. b) Préciser la nature des extremums de f.

3) le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.On note ζ_f la courbe représentative de la fonction f.

Déterminer les équations des tangentes à ζ_f parallèle à la droite $D: 3x+y-5=0$

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x+2}{x-2} & \text{si } x\in[4,+\infty[\\ \sqrt{4-x}+2x-1 & \text{si } x\in]-\infty,4[\end{cases}$

On note ζ_g la courbe représentative de la fonction g.

a) Montrer que g est continue en 4 . b) Etudier la dérivabilité de g à droite et à gauche en 4

c) Répondre par **V**rai ou **F**aux en justifiant la réponse i) g est dérivable en 4

ii) ζ_g admet une demi tangente horizontale à droite en 4.

iii) ζ_g admet une demi tangente verticale dirigée vers le bas à gauche en 4.

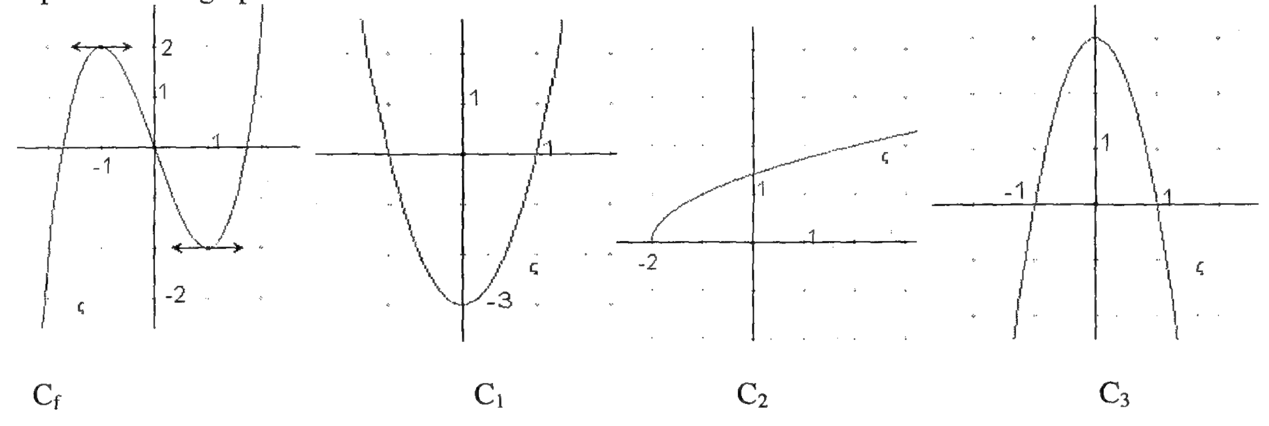
Exercice 21 : Soit la fonction $f(x)=\sqrt{x^2-2x}+x$.

1) Préciser les intervalles sur les quels f est dérivable et calculer f'(x) .

2) Montrer que pour tout $x\in\,]-\infty\,,0[$ *on a* : $\sqrt{x^2-2x}<1-x$

3) Donner le signe de f'(x) . 4) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 22: On a représenter la courbe C_f de f Parmi les courbe C_1 , C_2 , C_3 ci-dessous la quelle est la représentation graphie de la fonction f' ?



Exercice N°23 : Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{2x} & \text{si } 0<x\le 2 \\ f(x)=\sqrt{x^2-2x} & \text{si } x>2 \end{cases}$

On désigne par (ξ_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue en 2 ; b) Etudier la dérivabilité de f en 2

c) Construire dans un repère R les demi-tangentes à (ξ_f) au point d'abscisse 2.

2) a) Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et calculer $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que la droite $D: y=x-1$ est une asymptote oblique à (ξ_f) au voisinage de $+\infty$

b) Etudier la position relative de (ξ_f) et D sur $]2;+\infty[$.

4) Soit la fonction φ définie sur $[0;2]$ par : $\varphi(x)=2x^3-2x^2+5x-2$

a) Dresser le tableau de variation de φ sur $[0;2]$

b) En déduire que (ξ_f) coupe la parabole P d'équation $y=x^2$ en un unique point M_0 d'abscisse $\alpha\in\,]0.4;0.6[$.

Exercice N° 24 : 1) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)=2x^3+3x^2+1$.

a) Dresser le tableau de variation de g ; b) En déduire le signe que $g(x)>0$ sur $[-1;+\infty[$

2) On donne la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x+1} & \text{si } x\in\,]-1;1] \\ 1-\sqrt{x^2-1} & \text{si } x\in\,]1;+\infty[\end{cases}$

a) Etudier la continuité de f en 1.

b) Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et calculer $f'(x)$.

d) Dresser le tableau de variation de f

3) Soit Γ la partie de (ξ_f) relative à l'intervalle $]-1;1]$, existe-t-il des tangentes à Γ parallèles à la droite D d'équation $y = x+1$? Justifier.

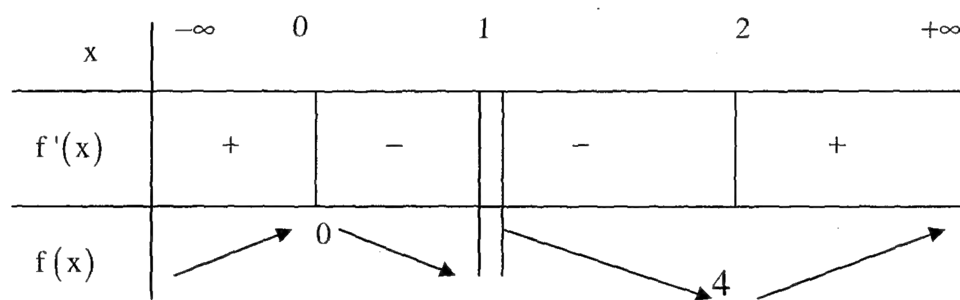
Exercice 25 : Soit la fonction définie sur $IR/\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1-x^6}{1-x}$

1) Calculer f'(x).

2) Montrer que pour tout $x \in IR/\{1\}$ on a : $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 = \dfrac{1-6x^5+5x^6}{(1-x)^2}$

3) Généraliser le résultat précédent à $1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots + n\,x^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in IR/\{1\}$

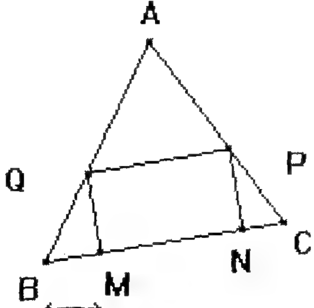
Exercice 26 : Le tableau de variation suivant est celui d'une fonction f définie par : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$



x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		+		−	‖	−		+	
f(x)		↗	0	↘	‖	↘	4	↗	

1) A partir du tableau déterminer les réels a , b et c .
2) Compléter le tableau . 3) Préciser les extremums de f

Exercice 27 : Soit un triangle équilatéral ABC dont le côté mesure a en cm, on inscrit dans ce triangle un rectangle MNPQ. On pose BM = x
Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle est elle maximale.



Exercice 28 : On considère une plaque de forme de carré de côte a on découpe en chacun des quatre coins de cette plaque un carré dont le côte a pour mesure c (en cm)On forme ensuite une boite sans couvercle en relevant les rectangles latéraux.

1) Montrer que x satisfait à la condition : $0 < x < \dfrac{a}{2}$.

2) Montrer que l'expression du volume de la boite est : $V = 4x^3 - 4ax^2$

3) Soit la fonction f définie sur $\left]a, \dfrac{a}{2}\right[$ par $f(x) = 4x^3 - 4\,ax^2 + a^2x$.

Dresser le tableau de variation de f
4) Comment choisir x pour que le volume de la boite soit maximale.

Exercice 30 : Soit la fonction f définie sur $]0\ ,+\infty[$ par $f(x) = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$

1) a/ Déterminer la fonction dérivée f' de f . b/ Vérifier que $f'(x) = \dfrac{4(x-1)\,(x^2+x+1)}{x^2}$

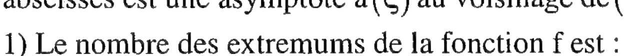
c/ Etudier le signe de f. d/ Dresser le tableau de variation de f

2) On construit un réservoir fermé en tôle , ayant la forme d'un parallélépipède rectangle , de hauteur h et dont la base est un carré de coté x (en m)
Exprimer l'aire S du tôle et le volume V de réservoir en fonction de x et h .

3) On suppose que la capacité du réservoir est 1 m^3

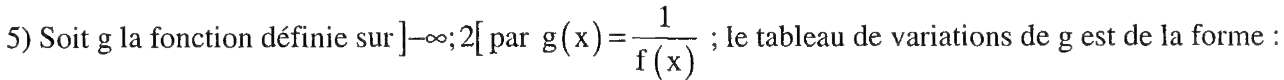
a/ Exprimer la hauteur h en fonction de x. b/ En déduire l'expression de S en fonction de x.
c/ à l'aide de la 1ere partie , déterminer x pour que l'aire S soit minimale.
d/ Donner les dimensions du réservoir.

Exercice N°31 : Dans chacune des questions suivantes, une seule réponse est correcte.
Trouver la (aucune justification n'est demandée)

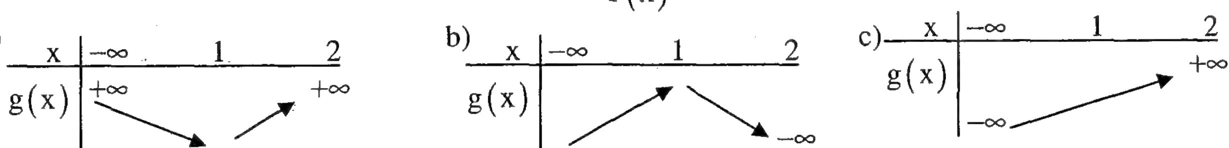


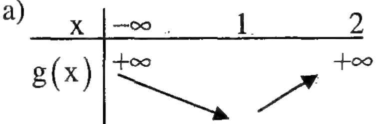
On désigne par (ξ) la courbe représentative d'une fonction définie sur $]-\infty;2]$, La droite $T: y = x+2$ est la tangente à (ξ) au point d'abscisse 0 et la droite des abscisses est une asymptote à (ξ) au voisinage de $(-\infty)$

1) Le nombre des extremums de la fonction f est :
a) 1 ; b) 2 ; c) 3
2) Le nombre dérivé de la fonction f en 0 est :
a) $f'(0)=0$; b) $f'(0)=1$; c) $f'(0)=-1$
3) La limite à gauche en 2 de $\frac{f(x)}{x-2}$ est égale à : a) $-\infty$; b) 0 ; c) $+\infty$
4) La limite en $-\infty$ de $\frac{1}{f(x)}$ est égale à : a) 0 ; b) $+\infty$; c) $-\infty$



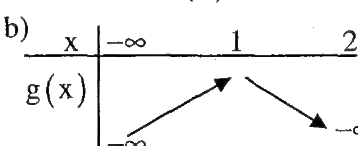
5) Soit g la fonction définie sur $]-\infty;2[$ par $g(x)=\frac{1}{f(x)}$; le tableau de variations de g est de la forme :





a)

x	$-\infty$	1	2
g(x)	$+\infty$ ↘		↗ $+\infty$



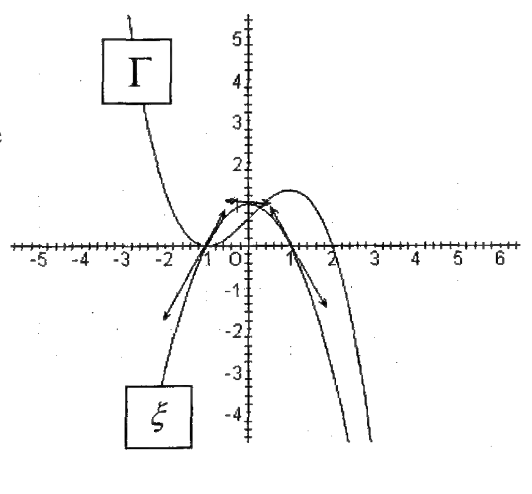
b)

x	$-\infty$	1	2
g(x)	$-\infty$ ↗		↘ $-\infty$

c)

x	$-\infty$	1	2
g(x)	$-\infty$ ↗		$+\infty$

Exercice N°32 : Dans le graphique ci-contre ξ et Γ sont les courbes représentatives, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, d'une fonction dérivable sur IR et de sa fonction dérivée f'. Chacune des deux courbes ξ et Γ possède deux branches infinies paraboliques de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.



1) a) Déterminer parmi les courbes ξ et Γ celle qui représente la fonction f.
b) Déterminer $f(-1);f(0);f(1);f'(-1)$ et $f'(1)$
2) Dresser le tableau de variations de f.
3) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
4) On admet que la fonction f est définie sur IR par $f(x)=ax^3+bx+x$ où a ; b et c sont trois réels.
Déterminer a ; b et c.
5) Déterminer la position relative de T par rapport à ξ

ExerciceN°33 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x+1}-2}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.b) Montrer que la fonction f est continue sur $[-1;3[$

2) a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 3 et déterminer son prolongement F.
b) Montrer que l'équation $F(x)=x$ admet dans $[0;3]$ une solution a.

3) Soit g la fonction définie par $\begin{cases} g(x)=F(x) & \text{si } x\geq 0 \\ g(x)=\dfrac{mx^2+2}{x^2-5x+4} & \text{si } x<3 \end{cases}$ où m est un paramètre réel.

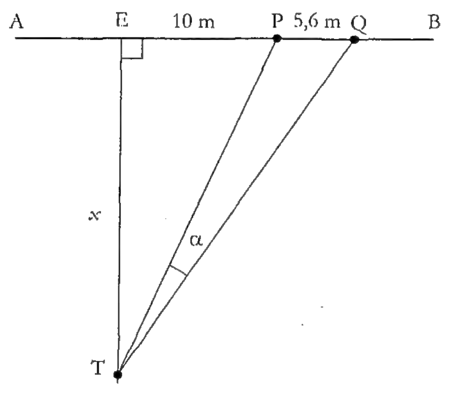
a) Déterminer l'ensemble de définition de g
b) Déterminer le réel m pour que la fonction g soit continue en 3. On prend dans la suite $m=-2$
4) a) Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en 1 et déterminer son prolongement G
b) Vérifier que pour tout réel $x\leq 1$, on a $G(x)=-2+\dfrac{10}{4-x}$
c)Etudier les variations de la fonction G sur l'intervalle $]-\infty;1]$ .d)Déduire que la fonction G est bornée sur $]-\infty;1]$.

Exercice N° 34: I) Soit f la fonction définie sur $IR\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$ et (ξ) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.1) Déterminer $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ Interpréter graphiquement le résultat.
2) a) Montrer que la droite $D : y = x+1$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $(-\infty)$
b) Etudier la position de (ξ) par rapport à D.
3) a) Montrer que f est dérivable en tout réel a de $IR\setminus\{-1\}$ et que $f'(a)=\dfrac{a^2+2a-3}{(a+1)^2}$
b) Soit A et B deux points de (ξ) d'abscisses respectives 0 et 3. Ecrire les équations des tangentes à (ξ) parallèles à (AB)

II) Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x)=f(x) & \text{si } x\in]-\infty;0[\\ g(x)=x+3+\sqrt{\dfrac{x+4}{x+1}} & \text{si } x\in [0;+\infty[\end{cases}$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de g dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
1) Déterminer le domaine de définition de g . 2) Montrer que g est continue en 0
3) Etudier la dérivabilité de g à gauche et à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
4) Montrer que la droite $\Delta : y = x+4$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $(+\infty)$

Exercice n°35: Au rugby, où le tireur doit-il déposer le ballon pour « s'ouvrir » au maximum de l'angle de but.
Sur le schéma ci-joint, le segment [AB] représente la ligne d'essai d'un terrain de rugby (marquer un essai consiste à déposer le ballon sur cette ligne ou au de-là. Les poteaux de but sont représentés par les points P et Q.on sait que PQ =5,6 m. Un essai a été marqué en E, à gauche du poteau P et à 10 mètres de celui-ci. Transformer cet essai consiste à tirer d'un point de son choix situé sur la perpendiculaire en E à (AB) et à faire passer le ballon entre les poteaux. On admettra que le point T, point idéal de tir, est celui pour lequel l'angle $\alpha=\widehat{PTQ}$ est maximal. 1) Montrer que pour tout réel a et b$\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a : $\tan(a-b)=\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a).\tan(b)}$



2)Calculer la distance x = ET pour la quelle cet angle est maximal.



RESUME DU COURS

Définition : Soit O un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On désigne par A et B les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le réel ainsi défini
* $\vec{u}.\vec{v} = OA.OB.\cos AOB$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls. * $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

Conséquence : Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Propriétés : Pour tous vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.. Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réels α et β,
$(\alpha.\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$, $\vec{u}(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$, $(\alpha.\vec{u})(\beta.\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u}.\vec{v})$

Pour tous vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$; $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$; $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$, $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.

Définition : Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Conséquence : Deux droites sont perpendiculaires, si et seulement si , le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

Propriété : * Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul et O, A et B des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Si H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AO), alors $\vec{u}.\vec{v} = \overline{OA}.\overline{OH}$.
* Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul et A , B et C des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, H le projeté de B sur (OA) et K le projeté de C sur (OA), alors $\vec{u}.\vec{v} = \overline{OA}.\overline{HK}$.

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (Inégalité de Cauchy – Schwarz)
$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$, si et seulement si , les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Théorème : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan.
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de composantes respectives (x , y) et (x' , y') , $\vec{u}.\vec{v}$ =x x' + y y'.

LES EXERCICES

Exercice 1 : L'une des réponses proposées est correcte laquelle ?

1) ABC un triangle tel que AB = 2 et AC = $\frac{1}{2}$; $B\hat{A}C = \frac{\pi}{3}$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est égale à :

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}$.

2) Si ABCD un carré de côté 1. Alors le produit scalaire $\overline{DC}.\overline{DB}$ = a) $\sqrt{2}$ b) 1 c) $-\sqrt{2}$

3)ABC étant un triangle tel que:AB = 2, AC = 5 et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -5$ .a) $B\hat{A}C = \frac{\pi}{3}$ b) $B\hat{A}C = \frac{2\pi}{3}$ c) $B\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$.

4) A et B étant deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que : $|\overline{MA}.\overline{MB}| = MA \times MB$ est

a) un cercle b) une droite c) un segment.

5) A, B, C et D quatre points deux à deux distincts tels que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ alors nécessairement on a :

a/ C et D sont confondus b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

6) ABC est un triangle, l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est :

a) La perpendiculaire à (AC) en C.
b) La perpendiculaire à (AB) et passant par C. c) La perpendiculaire à (AB) en A.

7) Soit ABC un triangle tels que : AB = AC = 2 et BC = 3. Alors a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$
c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-1$.

8) Soient A et B deux points distincts. L'ensemble des points M tels que : $MA^2=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA}$ est :
a) Le cercle de centre A et de rayon BA. b) La droite (AB) c) Le cercle de diamètre [AB].

Exercice 2 :Répondre par vrai au Faux et Justifier la réponse

1) A , B et C sont trois points distincts si : $\overrightarrow{AB}\ .\overrightarrow{AC}=3$ alors $(AB)\perp(AC)$.

2) Si $\vec{u}\ .\ \vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}=0$ ou $\vec{v}=0$

3) Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}\ .\ \vec{v}=\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|$

4) A, B et C trois points distinctes : $\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow AB^2+AC^2=BC^2$

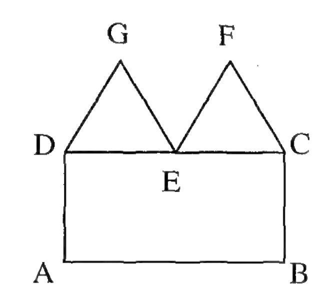
Exercice 3: Soit D une droite muni du repère $(o\ ,\vec{i}\ )$
1)Placer les points A, B et C s'abscisses respectifs 5 , -3 et 2 .
2) Soit D' la perpendiculaire à D en O et E un point de D' distinct de O.
Calculer : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}$ *et* $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OE}$

Exercice 4 : Soit ABCD un carré dont les côtés mesurent 6 cm. On appelle I le milieu de$[AB]$et J le milieu de$[BC]$.1) Calculer IJ ; DI et DJ.

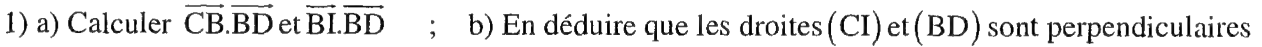
2) a) Calculer $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DJ}$; b) En déduire la mesure, à un degré prés, de l'angle $\widehat{IDJ}$.

Exercice 5 : Soient A et B deux poins distincts et I le milieu du segment [AB]. Caractériser l'ensemble E dans chacun des cas suivants (Aucune justification n'est demandée).
1)E est l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0$.
2) E est l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$.
3) E est l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=AM.BM$.
4) E est l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=-AM.BM$.
5) E est l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}$

Exercice 6 : Dans la figure ci-contre : ABCD est un rectangle tel que
$AB=2AD=2a\left(a\in IR_+^*\right)$
EFC et EGD sont deux triangles équilatéraux isométriques. Calculer :
1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$; 2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GF}$; 3) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{DE}$; 4) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BF}$



Exercice 7 : Dans le plan P, on considère un rectangle ABCD de centre O et tel que : $AB=6$ et $AD=3$. Soit I le point tel que : $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.


1) a) Calculer $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}$; b) En déduire que les droites(CI)et(BD)sont perpendiculaires
2) Déterminer et construire les ensembles suivants :
$E=\left\{M\in P; MB^2+MD^2=45\right\}$ et $F=\left\{M\in P;\left(\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MI}=MB^2.\overrightarrow{MI}\right\}$

Exercice 8 : Soient A et B deux points du plan tels que $AB=8$
1) Soit G le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;3)$
a) Construire le point G. Justifier b) Calculer les distances AG et BG

2) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que: $MA^2+3MB^2=64$ .a)Vérifier que B appartient à (E)

b) Démontrer que $MA^2+3MB^2=4MG^2+GA^2+3MG^2$. c) Déterminer alors l'ensemble (E) .

Exercices 9: ABC un triangle équilatéral tel que AB=3, I le milieu de $[AB]$ et D le symétrique de B par rapport à C .

1) a)Utiliser le théorème d'ELKHASHI pour calculer AD

b) vérifier que ABD est un triangle rectangle en A

2) Calculer $\overline{AB}.\overline{AC}$ et $\overline{BD}.\overline{AC}$

3)a) Montrer que pour tout point M du plan , on a : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}.\overline{AB}$

b) En déduire l'ensemble $\Delta=\{M\in P; MA^2-MB^2=-9\}$

4)Soit G le barycentre des points pondérés (A,3) et (B-2)

a) Montrer que pour tout point M du plan : $3MA^2-2MB^2=MG^2-54$

b)En déduire l'ensemble $E=\{M\in P;3MA^2-2MB^2=-38\}$

EXERCICE 10: Le plan P est orienté dans le sens direct. Soit ABCD un rectangle de centre I tel que AB = 4 et BC = 3.

1) a) Faites un schéma.

b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$. En déduire la valeur de $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

c) Montrer alors, que : $\cos(C\hat{I}D)=\frac{-7}{25}$.

2) a) Vérifier que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}=8$.

b) Déduire que l'ensemble $\Delta=\{M\hat{I}P, \text{tels que } \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=8\}$ est la médiatrice du segment [AB].

3) Soit $\Gamma=\{M\hat{I}P \text{ tels que } 2MA^2+MD^2=18\}$ et G le barycentre des points pondérés (A,2) et (D,1).

a) Vérifier que $D\in\Gamma$.

b) Montrer que pour tout $M\in P$ on a : $2MA^2 + MD^2 = 3\ MG^2 + 6$. Déterminer et tracer alors Γ .

4) On désigne par A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur la droite (BD).

a) Montrer que : $\overrightarrow{AC}\ .\ \overline{BD}=-5\,A'C'$. b) En déduire la valeur de la distance A'C'.

Exercice 11 Dans le plan P on considère un triangle ABC rectangle en A de centre de gravité G ; tel que AC=2 et BC=3 . Soit I=B*C ; J= A*C

1) Calculer $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$ .2/ Déterminer l'ensemble $E=\left\{M\in P; MB^2+MC^2=\frac{25}{2}\right\}$.

3)Soit l'ensemble $F=\{M\in P;\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG}=-1\}$. a)Vérifier que $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}=-2$

b)Montrer que pour tout M du plan on a $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG}=MG^2-2$. c) Déduire l'ensemble F.

Exercice 12 : Soit ABCD un rectangle du plan tels que : AB = 8 et BC = 4. on note E le point de [CD] tel que : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}, \{I\}=(AC)\cap(BE)$ et $\{F\}=(AD)\cap(BE)$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}$. B) En déduire que : $(CE)\perp(AC)$.

2) Calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AF}$. 3) On note ζ l'ensemble des points M du plan tel que : $MB^2+4ME^2=272$.

a) Montrer que $A\in\zeta$. B) Montrer que : $\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IE}=\vec{0}$. Calculer alors IB et IE.

c) Montrer que pour tout M du plan : $MB^2+4ME^2=5MI^2+16$. d) En déduire ζ et le construire.

Exercice 13 : Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On donne les points $A(1;0)$; $B(-3;8)$ et $C(3-\sqrt{3};1+2\sqrt{3})$.

1) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; b) En déduire la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$

2) Soient les points $I(0;2)$ et $J(3;-4)$

a) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (ζ) des points M de P qui vérifient $MJ = 2MI$

b) En déduire que (ζ) est le cercle de diamètre $[AB]$

3) a) Donner une équation de la tangente (T) à (ζ) en A.b) Prouver que $(T) = \{M \in P \setminus MJ^2 - MI^2 = 15\}$

Exercice 14: Soit un triangle ABC tel que $AB = 4$; $AC = 6$ et $BC = 8$

On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$

1)a) Montrer que pour tout M du plan P on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 8$

b) Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = MJ^2 - 9$

c) Déterminer l'ensemble ζ des points M de P tel que $MA^2 + MB^2 - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 1$

2) Soit $O = I * J$ et $(O,\vec{u})$ un repère de la droite (IJ) tel que $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IJ}$

a) Montrer que pour tout $M \in P$ on a : $MI^2 - MJ^2 = 2\overline{IJ}.\overline{OK}$ avec k est le projeté orthogonal de M sur la droite (IJ)

b) Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = -6$

Exercice 15: On considère les points A , B et C tel que AB = AC = 5 et BC = 6.
Soit G le barycentre de (A ,2) ; (B , 3) et (C , 3) et I = B * C

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{AC}$

2) Soit l'application : $f: P \to IR$, $M \mapsto f(M)$; $f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\ \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\ \overrightarrow{MB}$

Montrer que pour tout point M on a $f(M) = 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + 4MG^2$.

3) Déterminer et construire l'ensemble ζ des points M du plan tel que f (M) = f (A).

4) Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan et les points A(1,4) ; B(-2,0) et C(4,0).

a)Déterminer les coordonnées du point G .b)Retrouver analytiquement le résultat de la question 3.

EXERCICE N°16:Dans le plan P on considère un carré ABCD de centre O de coté (a > 0). On construit à l'intérieur du carré un triangle équilatéral ABE.

1) a) Exprimer en fonction de a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$ puis déduire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$.

b) Déduire la valeur de $\cos\ \widehat{EAC}$, puis celle de $\cos\frac{\pi}{12}$. Montrer alors que $OE^2 = a^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) Montrer que $\forall M \in P$ on a : $\overrightarrow{MA}.\ \overrightarrow{MC} = MO^2 - \frac{a^2}{2}$. Déduire l'ensemble :

$(\xi_1) = \left\{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \frac{a^2}{2}\right\}$.

3) Soit G le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,2).

a) Montrer que $\forall M \in P$ on a : $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + \frac{2}{3}a^2$.

b) Déduire l'ensemble $(\xi_2)=\{M\in P \text{ tel que } MA^2+2MB^2=a^2\}$.

c) Déduire l'ensemble $(\xi_3)=\{M\in P \text{ tel que } \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CM}\}$.

4) Soit $\Delta=\left\{MA^2\text{-}MO^2=a^2\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Vérifier que $\mathbf{E}\in\mathbf{\Delta}$ puis déterminer Δ.

Exercice 17 : Soit A et B deux points du plan

1) Montrer que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=\frac{MA^2+MB^2-AB^2}{2}$

2) Soit $E=\{M\in P\ ,\ \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=m\ ,\ m\in IR\}$. a)Déterminer l'ensemble E .

a) Pour quelle valeur de m , E est un cercle de diamètre[AB] .

Exercice 18 :

Soit ABC un triangle tel que AB=3 ; AC = 6 et $B\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}$. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

1) a) Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$, b) En déduire la distance AH.

2)Montrer que H est le barycentre des points pondérées (A ,2) et (B, -1)

3) Déterminer les ensembles suivantes : a) $\zeta_1=\left\{M\in P\ ;\ \frac{MB}{MA}=\sqrt{2}\right\}$

b) $\zeta_2=\left\{M\in P\ ;\ 2\left\|\,2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|\right\}$

Exercice 19 : $(O\ ,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan , on donne les points A(1 , 0) ; B (-5 , 8) ; C (-2 , $\sqrt{3}$) et D ($\sqrt{3}-2$, $\sqrt{3}+1$) .

1)a)Calculer de deux manières le produit scolaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$.

b)En déduire la mesure de l'angle géométrique $A\hat{C}D$.

2)a)Ecrire une équation du cercle ζ de diamètre [AB].b)Ecrire une équation de la tangente à ζ au point B.

Exercice 20 :A, B et C trois points non alignés du plan tel que AB = 4

1)Placer le point H sur (AB) tel que $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BH}=2$

2) Déterminer les ensembles suivants :a) $\Delta_1=\{M\in P;\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}=2\}$

b) $\Delta_2=\{M\in P;\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}\}$ c) $\Delta_3=\{M\in P;\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}\}$,

d) $\Delta_4=\{M\in P\ ;\ MA^2+3MB^2=12\}$

Exercice 21 : On considère la droit Δ d'équation Δ : 2x + 3 y + 5 = 0 et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

1) a) Déterminer l'ensemble suivant : $\zeta=\{M\in P\ ;\ \overrightarrow{OM}\,.\,\vec{u}=-5\}$. Que peut-on déduire.

b) En déduire la distance de O à Δ.

2) Soit A (1 , -2) a)Calculer $\overrightarrow{OA}.\vec{u}$

b)Soit $M\in\Delta$; montrer que $\overrightarrow{AM}.\vec{u}$ est indépendant de M. c)En déduire la distance de A à Δ.

Exercice 22 : Soit ABCD un parallélogramme de centre O telque $AB=5$ est $AD=3$ et $B\hat{A}D=\frac{\pi}{3}$,

1)Calculer les produits scolaires suivantes : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ .2)Calculer les distances BD et AC.

3)En déduire $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OD}$ et une valeur approchée de $A\hat{O}D$

Exercice 23 : Soit ABC un triangle et soit H : l'orthocentre de ABC ; A' : projeté orthogonale de H sur (BC) ; B' : projeté orthogonale de H sur (AC) et C' : projeté orthogonale de H sur (AB)

1°/ Faire un figure, 2°/ Montrer que $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

3°/ a) Montrer que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$. b) En déduire que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'}$

4°/ Montrer que : $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}$. 5) Montrer que HA.HA'=HB.HB'=HC.HC'.

Exercice 24 : ABC un triangle rectangle en A et I = B * C ; H : projeté orth. de A sur (BC)

K : projeté orthogonale de A sur (AC) et L : projeté orthogonale de A sur (AB)

1°/ Faire une figure . 2°/ Montrer que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AK}\right)$

3°/ a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$. b) Déduire que $(AI) \perp (KL)$

Exercice 25 :

Soit ABC un triangle de centre de gravité G et les points A' = B* C , B' = A * C et C' = A * B .

1) a)Montrer que $AA'^2 = \frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} AC^2 - \frac{1}{4} BC^2$.

b) En déduire que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$

2) On donne AB = 4 , BC = 5 et AC = 7

a) Déterminer et construire l'ensemble suivant : $\zeta_1 = \{M \in P \; ; MA^2 + MB^2 + MC^2 = 78\}$

b) Montrer que : $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

c) Déterminer et construire l'ensemble suivant : $\zeta_2 = \{M \in P \; ; \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 60\}$.

Exercice 26 : ABC un triangle équilatéral de centre de gravité G et de cote 6 cm , et O = A * C.

1)a)Montrer que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + 36$.

b) $\zeta = \{M \in P / MA^2 + MB^2 + MC^2 = 45\}$. Déterminer et construire ζ.

2) Soit $D = \{M \in P / \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GC} = 6\}$. Déterminer et construire D .

3) le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,A (-3,0) ; B $(0, 3\sqrt{3})$; C (3,0) et M (x , y) .

a) Calculer les coordonnées de G ; b) Ecrire une équation cartésienne de D

c) Vérifier que D est tangent à ζ .

Exercice 27 :

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre A et D un point vérifiant $2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

1) Vérifier que $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

2) a) Exprimer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de a . b) Montrer que (AB) // (DC) et que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

3) Calculer les distances CD ; BD et AD en fonction de a .

4) Soit $f(M) = 2 MA^2 - 2MB^2 - MC^2$

a)Vérifier que f(c) = 0 , b/ Exprimer f (M) en fonction de MD et a .

c)Déterminer l'ensemble suivant : $\zeta_1 = \{M \in P \; ; f(M) = 0\}$

5) Soit $g(M) = 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DB} + a^2$. Déterminer l'ensemble suivant : $\zeta_2 = \{M \in P \; ; g(M) = a^2\}$

6) Soit $\{I\} = \zeta_1 \cap \zeta_2$, $I \neq C$. Montrer que CDI est équilatéral.

Exercice 28 : Soit ABC un triangle non équilatéral inscrit dans un cercle ζ de centre O et A' = B * C, B' = A * C et C' = A * B, on pose a = BC ; b = AC et AB = c

1) Soit le vecteur $\vec{u} = a^2\overrightarrow{BC} + b^2\overrightarrow{CA} + c^2.\overrightarrow{AB}$. a) Montrer que $\vec{u} = (a^2 - b^2)\overrightarrow{AC} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{AB}$,

56b) En déduire que $\vec{u}$ n'est pas le vecteur réel

2) soit l'application $f : P \to IR$; $M \mapsto a^2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MA'} + b^2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB'} + c^2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC'}$. a) Calculer f(O)

b) Soit G le centre de gravité de ABC . Montrer que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GA'} = \frac{1}{6}(b^2 - c^2)$ et en déduire f(G).

c) Déterminer l'ensemble ζ des points M du plan tel que f(M) = 0.

Exercice 29 :*Soit* ABCD *un carré de cantre* O. M est un point variable de la diagonale $[AC]$ distinct de A et C. M se projette en P et Q sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du carré.

1) Montrer que (DM) est perpendiculaire à (PQ).

2) On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

a) Calculer $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}$; b) Montrer que OPQ est un triangle rectangle isocèle.

Exercice 30 : On considère un rectangle ABCD tel que $AB = 4$ et $BC = 2$. On pose I le milieu de$[CD]$ et G le barycentre des points pondérés$(C;3)$ et $(D;1)$. Les droites (AC)et(BG) se coupent en K.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CG} = 4$ .b) En déduire que les droites(AC)et(BG)sont perpendiculaires.

2) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DG}$; b) En déduire que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG} = 16$

c) Calculer alors la distance AK.

3) a) Montrer que pour tout point M du plan ; On a $3MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + 12$

b) Déterminer et construire l'ensemble $\xi = \{M \in P \text{ tel que } 3MC^2 + MD^2 = 16\}$

4) Soit $\Delta = \{M \in P \text{ tel que } MD^2 - MC^2 = 16\}$. a) Vérifier que $C \in \Delta$; b) Montrer que Δ est la droite(BC).

Exercice 31 : On considère, dans un plan P, un triangle ABC ; on désigne par I le milieu du segment$[BC]$et par K le projeté orthogonal de A sur la droite(BC). On donne $BC = 2; CK = 6; AC = 10$ et $C \in [BK]$.

1) a) Faire une figure ; b) Prouver que le triangle ABK est isocèle

2) Calculer chacun des produits scolaires suivants : $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CK}.\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}^2$

3) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et soit l'application :

$f : P \to IR$ tel que $M \mapsto f(M) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{MG}$. a) Calculer $f(A)$ et $f(G)$

b) Montrer que pour tout point M de P, on a $f(M) = MG^2 + f(G)$

c) Déterminer l'ensemble(ζ)des points de P qui vérifient $f(M) = \frac{556}{9}$

Exercice N°32 : Soit ABCD un carré de centre O et de coté 4

On désigne par L,J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[DC]$. Soit $E = S_C(D)$

1)a) Montre que $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OE} = -8$ b)Déduire $\cos\widehat{DOE}$

2)a) Calculer $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD}$ b)Déduire que$(AJ) \perp (ID)$

3)a)Montrer que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{ME} = MC^2 - 16$

b)Déterminer l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{ME} = -7\}$

4)a) vérifier que K est le barycentre des points pondérés (D,3) et (E,1).

b)Déterminer, suivant les valeurs de K ,l'ensemble $\Gamma = \{M \in P \text{ tel que } 3MD^2 + ME^2 = m; \text{où } m \in IR\}$

Exercice 33: I) Soit A, B et C trois points alignés du plan P tels que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$. On note $I = B * C$

1)a) Montrer que $B = A * I$

b) Montrer que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 2\left(MB^2 - AB^2\right)$

2) Déterminer alors l'ensemble $\zeta = \left\{M \in P\ ;\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}\right\}$

II) Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ On donne $A(-2,1)$ et $B(-1,2)$

1) Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 6$

2) Montrer que ζ et Δ sont tangente au point I

Exercice 34

a,a',b , b' étant 4 réels quelconques montrer que $(ab+a'b')^2 \leq (a^2+a'^2) \times (b^2+b'^2)$.

Exercice 35: Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O tel que $AB = 3$; $AD = 2$ et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$

1)a) Calculer BD. b) Montrer que $2\left(AB^2 + AD^2\right) = AC^2 + BD^2$. c) En déduire AC.

2)a) Montrer que pour tout point M du plan tel que on a : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MD^2 + 13$

b) En déduire l'ensemble $E = \left\{M \in P / MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 17\right\}$

3) Soit Δ la droite perpendiculaire en A à (AB) ; M un point variable sur Δ et M' un point de (AB) tel que $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DM'} = 2DA^2$. a) Soit $I = M * M'$. Montrer que $2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI} = -AD^2$

b) En déduire l'ensemble D des points I lorsque M varie sur Δ.

Exercice N°36 : On considère dans un plan P, un triangle équilatéral ABC de coté a et on désigne par I le milieu du segment $[BC]$.

1) a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M de P tels que : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \frac{a^2}{2}$

b) Vérifier que A appartient à E_1 puis tracer E_1.

2) Soit D le symétrique de A par rapport à la droite (BC).

a) Montrer que pour tout point M de P on a : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} + \frac{a^2}{2}$.

b) En déduire l'ensemble E_2 des points M de P tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MA^2$. Construire E_2.

3) Soit G le barycentre des points pondérés $(A;2)$; $(B;1)$ et $(C;1)$.

a) Montrer que G est le milieu du segment $[AI]$.

b) Montrer que pour tout point M de P on a : $MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 2MG^2 + GA^2 + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{GC}$

c) Déterminer suivant les valeurs du réel k , l'ensemble (C_k) des points M de P tels que : $MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = k$.

d) Pour quelles valeurs de k, (C_k) est-il tangent à E_1 ?

RESUME DU COURS

Définition : Soit (A, B) un couple de points distincts d'un cercle orienté ζ .
Alors, il y a deux arcs de cercle d'origine A et d'extrémité B.
Un et un seul de ces arcs est orienté conformément à l'orientation du cercle.
On l'appelle arc orienté d'origine A et d'extrémité B et on le note $\overset{\frown}{AB}$.
On convient que le couple (A, A) détermine un arc orienté dont l'origine et l'extrémité sont confondues. On le note $\overset{\frown}{AA}$.
Définition : Soit ζ un cercle orienté de rayon 1, (A ,B) un couple de points distincts de ζ et L la longueur de l'arc géométrique associé à AB .On appelle mesure algébrique de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ et on note mes $\overset{\frown}{AB}$ tout réel de la forme $L + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Conséquences : Soit ζ un cercle orienté de rayon 1 et A et B deux points de ζ.
* Si x et y sont deux mesures de $\overset{\frown}{AB}$, alors $x - y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
* L'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ possède une unique mesure dans $[0, 2\pi[$, qui est la langueur de l'arc géométrique associé.
* Pour tout point M de ζ et tout réel x, il existe un unique point N de ζ tel que mes $\overset{\frown}{MN} = x$.
Propriétés (admises) : Pour tous points A, B et C d'un cercle orienté ζ de rayon 1 , on a :
mes $\overset{\frown}{AB}$ + mes $\overset{\frown}{BC} \equiv$ mes $\overset{\frown}{AC}$ $[2\pi]$ (Relation de Chasles).mes $\overset{\frown}{AB} \equiv$- mes BA $[2\pi]$.
Théorème (admis) : Toute symétrie axiale transforme les mesures des arcs orientés en leurs opposés .Toute translation conserve les mesures des arcs orientés.
Définition :Soit O un point du plan orienté dans le sens direct et ζ le cercle trigonométrique de centre O. Soit ($\vec{u}$ et $\vec{v}$) un couple de vecteurs non nuls. On désigne par E et F les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OE}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OF}$ et par A et B les points d'intersection respectifs du cercle ζ et des demi – droites [OE) et [OF).On appelle mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ toute mesure de l'arc orienté AB.

Propriétés : Le plan est orienté dans le sens direct : Soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
* Pour tous réels strictement positifs a et b les angles orientés $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ et $(a\vec{u}, b\vec{v})$ ont les mêmes mesures.

* Si α est une mesure de $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ alors toute mesure de $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ et de la forme $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

* Toute mesure de ($\vec{u}$, $\vec{u}$) est la forme $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
* Toute mesure de $(\vec{u}, -\vec{u})$ est la forme $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Propriétés (admises) : * Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et α un réel .Il existe un unique vecteur unitaire $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha[2\pi]$.
* Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{v}'$ trois vecteurs non nuls. Alors $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}')\,[2\pi]$, si et seulement si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont colinéaires et de même sens.
Propriétés :Le plan est orienté dans le sens direct. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) \equiv 0\ [2\pi]$, si et seulement si , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens .

$\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) \equiv \pi[2\pi]$, si et seulement si , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposés.

Propriété : Le plan est orienté dans le sens direct .Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls .

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, si et seulement si , $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$.

Définition : Le plan est orienté dans le sens direct. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors l'angle orienté ($\vec{u}$, $\vec{v}$) admet une unique mesure dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, appelée mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$).
Propriétés : Dans le plan orienté dans le sens direct , on considère trois points non alignés I , F et G tels

que $\widehat{FIG} = a$ .Si L est la mesure de $\overset{\frown}{\overrightarrow{AB}}$ qui appartient à $[0\ ,\ 2\pi[$ et α est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IG}\right)$, alors $\alpha = \begin{cases} a & si\ 0 \leq L \leq \pi \\ -a & si\ \pi \langle L \langle 2\pi \end{cases}$.

Propriété : Le plan est orienté dans le sens direct. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, $\left(\vec{u}\ \hat{,}\ \vec{w}\right) \equiv \left(\vec{u}\ \hat{,}\ \vec{v}\right) + \left(\vec{v}\ \hat{,}\ \vec{w}\right)[2\pi]$ (Relation de Chasles).

Propriété :Le plan est orienté dans le sens direct. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}\,'$ et $\vec{v}\,'$, $\left(\vec{u}\ \hat{,}\ \vec{v}\right) \equiv \left(\vec{u}\,'\ \hat{,}\ \vec{v}\right)[2\pi]$, si et seulement si , $\left(\vec{u}\ \hat{,}\ \vec{u}\,'\right) \equiv \left(\vec{v}\ \hat{,}\ \vec{v}\,'\right)[2\pi]$.

Propriétés : Le plan est orienté dans le sens direct .

* Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\left(\vec{u}\ \hat{,}\ \vec{v}\right) \equiv -\left(\vec{v}\ \hat{,}\ \vec{u}\right)\ [2\pi]$; $\left(-\vec{u}\ \hat{,}\ \vec{v}\right) \equiv \pi + \left(\vec{u}\ \hat{,}\ \vec{v}\right)\ [2\pi]$

$\left(\vec{u}\ \hat{,}\ -\vec{v}\right) \equiv \pi + \left(\vec{u}\ \hat{,}\ \vec{v}\right)\ [2\pi]$; $\left(-\vec{u}\ \hat{,}\ -\vec{v}\right) \equiv \left(\vec{u}\ \hat{,}\ \vec{v}\right)\ [2\pi]$.

* Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels non nuls a et b , $\left(a\vec{u}\ \hat{,}\ b\vec{v}\right) \equiv \left(\vec{u}\ \hat{,}\ \vec{v}\right)\ [2\pi]$ si $ab > 0$; $\left(a\vec{u}\ \hat{,}\ b\vec{v}\right) \equiv \pi + \left(\vec{u}\ \hat{,}\ \vec{v}\right)\ [2\pi]$ si $ab < 0$.

Définition :On dit qu'un angle est inscrit dans un cercle lorsque son sommet appartient à ce cercle et ses côtés recoupent ce cercle ; l'un des côtés pouvant être tangent au cercle.

Théorème :Soit ζ un cercle de centre O dans le plan orienté dans le sens direct .

* Pour tous points distincts A , B et M du cercle ζ , $\left(\overrightarrow{OA}\ \hat{,}\ \overrightarrow{OB}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{MA}\ \hat{,}\ \overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi]$.

* Si la droite (AT) est tangente au cercle ζ en A, alors $\left(\overrightarrow{OA}\ \hat{,}\ \overrightarrow{OB}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{AT}\ \hat{,}\ \overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$.

Propriétés (admises) :Dans le plan orienté dans le sens direct , soit A , B , M et N quatre points distincts d'un cercle .

* Si M et N appartiennent à l'arc orienté $\overset{\frown}{\overrightarrow{AB}}$, alors $\left(\overrightarrow{MA}\ \hat{,}\ \overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{NA}\ \hat{,}\ \overrightarrow{NB}\right)\ [2\pi]$.

* Si M appartient à l'arc orienté $\overset{\frown}{\overrightarrow{AB}}$ et N appartient à l'arc orienté BA , alors $\left(\overrightarrow{MA}\ \hat{,}\ \overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{NA}\ \hat{,}\ \overrightarrow{NB}\right) + \pi\ [2\pi]$.

Théorème : Soit A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct , $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et T un point du plan tel que $\left(\overrightarrow{AT}\ \hat{,}\ \overrightarrow{AB}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$ .Il existe un unique cercle ζ passant par A et B et tangent à (AT) en A . L'ensemble des points M tel que $\left(\overrightarrow{MA}\ \hat{,}\ \overrightarrow{MB}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$ et l'un des deux arcs orienté $\overset{\frown}{\overrightarrow{BA}}$ ou $\overset{\frown}{\overrightarrow{AB}}$ privé des points A et B.

Définition : Le plan est orienté dans le sens direct . On dit qu'une base $\left(\vec{i}\ \hat{,}\ \vec{j}\right)$ du plan est orthonormée directe si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\left(\vec{i}\ \hat{,}\ \vec{j}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On dit qu'une base $\left(\vec{i}\ \hat{,}\ \vec{j}\right)$ du plan est orthonormée indirect si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\left(\vec{i}\ \hat{,}\ \vec{j}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Définition : Le plan est orienté dans le sens direct .Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et soit $\vec{u}\,'$ le vecteur vérifiant $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\,'\|$ et $\left(\vec{u}\ \hat{,}\ \vec{u}\,'\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On appelle déterminant du ($\vec{u}$, $\vec{v}$) et on note : dét ($\vec{u}$, $\vec{v}$) le réel $\vec{v}.\vec{u}\,'$ .On convient que si l'un des vecteurs est nul , leur déterminant est nul.

EXERCICES

Exercice n°1 Cocher la réponse exacte :

1/ si $\left(\vec{U},\vec{V}\right)=\frac{130\pi}{3}[2\pi]$ alors la mesure principale de $\left(\vec{U},\vec{V}\right)$ est égale à :

a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $-\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{\pi}{3}$

2/ Si $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\pi[2\pi]$ alors a) $C\in[AB]$; b) $A\in[CB]$; c) $B\in[CA]$

3/ Soit U et V deux vecteurs non nuls $\left(\vec{U},\vec{V}\right)\equiv\frac{\pi}{10}[2\pi]$ alors

a) $\left(\vec{U},-\vec{V}\right)\equiv-\frac{\pi}{10}[2\pi]$; b) $\left(\vec{U},-\vec{V}\right)\equiv-\frac{9\pi}{10}[2\pi]$; c) $\left(\vec{U},-\vec{V}\right)\equiv\frac{9\pi}{10}[2\pi]$

4) A et B deux points distincts d'un plan orienté. L'ensemble $F=\left\{M\in P\setminus\left(\widehat{\overline{MA};\overline{MB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$ est :

a) Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B

b) Demi-cercle de diamètre $[AB]$; c) Cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

5) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté de sens direct tels que $\left(\vec{u},\vec{v}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

on a : a) $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$, b) $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$, c) $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$

6) Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.On donne les points A,B et C tels

que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3\sqrt{2}$ alors $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=$ a) 6 b) $3\sqrt{2}$ c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

7) Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ACB un triangle équilatéral et (Γ) le cercle de centre O passant par A et B et tangent à $[AC)$ en A. On désigne par M un point de l'arc $\overset{\frown}{BA}\setminus\{A;B\}$ du cercle (Γ).

a) La mesure principale de l'angle $\left(\overline{MA};\overline{MB}\right)$ est :

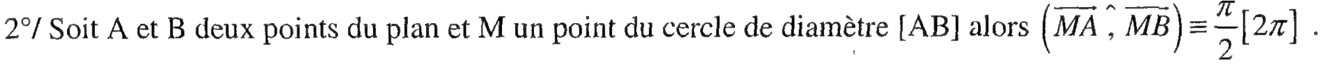
*) $\frac{\pi}{6}$; **) $\frac{\pi}{3}$; ***) $-\frac{\pi}{3}$

b) L'ensemble des points N du plan tel que $\left(\widehat{\overline{NA};\overline{NB}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ est :

* $\overset{\frown}{BA}\setminus\{A;B\}$; **) $\overset{\frown}{AB}\setminus\{A;B\}$; ***) $(\Gamma)\setminus\{A;B\}$

Exercice 2 : Répondre par vrai au faux en justifiant la réponse :

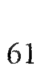
1°/ Si A , B , C trois points alignées alors $(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC})\equiv0[2\pi]$



2°/ Soit A et B deux points du plan et M un point du cercle de diamètre [AB] alors $\left(\overrightarrow{MA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{MB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

3°/ La mesure principale de l'angle plat est $-\pi$.

4°/ Soit A et B deux points distincts du plan :E = $\left\{M\in P\ \textit{tel que}\left(\overrightarrow{MA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$



Alors E est un cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

5°/si $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \pi[2\pi]$ alors $M \in [AB]$.

6°/si $(\vec{u},\vec{v}) \equiv 0[2\pi]$ alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

7) si $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) \equiv x[2\pi]$ alors $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}}) \equiv \pi + x[2\pi]$.

Exercice 3 : Soient A, B deux points d'un cercle et α une mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$.

Déterminer dans chacun des cas suivants une mesure de $\overset{\frown}{AB}$ dans $[0,2\pi]$

a) $\alpha = \frac{15}{2}\pi$. b) $\alpha = \frac{57}{4}\pi$. c) $\alpha = \frac{-171}{2}\pi$.

Exercice 4 : Soient A, B et C trois points d'un cercle trigonométrique tel que :

Mesure $\overset{\frown}{AB} \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et Mesure $\overset{\frown}{AC} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1°/ Déterminer mesure $\overset{\frown}{BC}$.

2°/ Soit B' = $S_{(oc)}$ (B) ; C' = $S_{(OA)}$ (C). Déterminer mesure $\overset{\frown}{AB'}$ et mesure $\overset{\frown}{CC'}$.

Exercice 5 : O et A deux points du plan orienté tel que OA = 5

1°/ Construire les points B , C et D tels que :

OB = 4 , OC = 3 , OD = 6 et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$; $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$; $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

2°/ Déterminer la mesure principale en radian des angles orientés : $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}})$

Exercice 6 : A,B,C , D et E des points du plan tels que :

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$; $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$; $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

1°/ Déterminer la mesure principale en radian des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}})$

2°/ Montrer que A , D et E sont alignés .

Exercice 7 Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère les points A,B,C , D et E tels que : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv -\frac{23\pi}{10}[2\pi]$, $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}) \equiv -\frac{47\pi}{10}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{5}[2\pi]$

1)déterminer les mesures principales $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}})$.

2)Montrer que A,B et E sont alignés.

3)Montrer que $(AC) \perp (AD)$

Exercice 8 Dans le plan orienté P on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O . Soit A un point de $\mathcal{C}$

1/ construire le point B de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv -\frac{59\pi}{3}[2\pi]$

2/ a- Construire le point C de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{32\pi}{3}[2\pi]$

b-Montrer que les points O,B et C sont alignés .

3/ a-Construire le point D de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) \equiv -\frac{71\pi}{6}[2\pi]$

b- Montrer que OAD est un triangle rectangle.

4/ Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Exercice 9: Le plan P est orienté dans le sens direct. On considère un triangle ABC isocèle de sommet principal A tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right) \equiv -\frac{35\pi}{6}[2\pi]$.

1) a) Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$; b) Construire ABC.

c) Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2) a) Construire le point D tel que : $CA = CD$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et construire le point E de (AC) tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

b) Montrer que les droites (DE) et (AB) sont parallèles.

c) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés suivants : $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD}\right)$ et $\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{DE}\right)$

Exercice 10 : Soient A et B deux points distincts du plan. Représenter dans chacun des cas suivants l'ensemble des points M du plan tels que :

1°/ $\Delta_1 = \left\{\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]\right\}$ 2°/ $\Delta_2 = \left\{\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \pi[2\pi]\right\}$

3°/ $\Delta_3 = \left\{\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$ 4°/ $\Delta_4 = \left\{\frac{MA}{MB} = 3\right\}$

Exercice 11 : Soit ABCD un carré tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. on construit à l'intérieur du carré un triangle équilatéral ABF et à l'extérieur de carré un triangle équilatéral BCE.

1) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et que $\left(\widehat{\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}}\right) \equiv \frac{-\pi}{4}[2\pi]$

2) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ et que $\left(\widehat{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}}\right) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

3) Montrer que les points E , F et D sont alignés.

Exercice 12 : Dans le plan orienté dans le sens direct, on donne les points A, B et C non alignés tels que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right) \equiv -\frac{39\pi}{4}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{25\pi}{3}[2\pi]$.

1) Déterminer la mesure principale de chacun des angles suivants : $\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$

2) Soit M un point de segment $[BC]$ distinct des points B et C. On désigne par N et Q les symétriques respectifs de M par rapport aux droites (AB) et (AC).

a) Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN}}\right)[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AM}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$

b) En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AQ}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$

c) Montrer que $\frac{5\pi}{6}$ est la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AQ}\right)$

d) Quelle est alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{NQ};\overrightarrow{NA}\right)$?

3) Soit α une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right)$.

a) Calculer en fonction de α, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{NA})$

b) En déduire les valeurs de α pour lesquelles les droites (NQ) et (BC) soient parallèles.

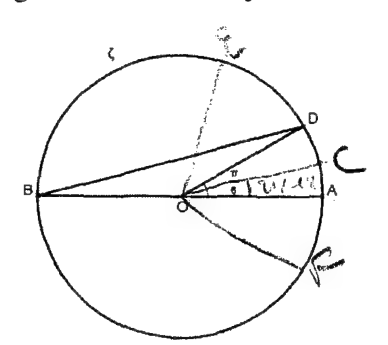
Exercice 13 : ABC un triangle rectangle en A du plan oriente P tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et Δ la médiatrice de [BC].

Soit I = B * C et D = S_Δ (A). La droite Δ coupe le segment [AC] en un point O .

1/ Donner une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}})$. 2/ Vérifier que ABI est équilatéral.

3/ a) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA}})$. b) En déduire que ABID est un losange

Exercice 14: Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre :* ξ est un cercle trigonométrique de centre O et de diamètre $[AB]$



* D est le point de ξ tel que : $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

1) On considère les points C et E de ξ définis par :

$(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}})\equiv\frac{-119\pi}{12}[2\pi]$; $(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OE}})\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

a)Montrer que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})$ a pour mesure principale $\frac{\pi}{12}$

b)Construire les points C et E

2) Montrer, en calculant $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}})$ que les droites (BD) et (OC) sont parallèles.

3) Construire le point F du plan tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OF}})\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $OF=2$.

Montrer que E est le milieu de $[OF]$

4) a) Calculer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OD}})$.

b) En déduire que la droite (FD) est tangente à ξ.

5) a) En appliquant El-Kashi dans le triangle OAD, montrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}=\frac{OD^2+OA^2-AD^2}{2}$.

En déduire AD. b) calculer BD. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 15 : Le plan est orienté dans le sens direct. On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle (ξ) tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{37\pi}{6}[2\pi]$

1) a) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$. b) Faire une figure.

2) On considère le point D sur le cercle (ξ) tel que $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}})\equiv-\frac{95\pi}{3}[2\pi]$

a) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})$

b) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$. En déduire que les deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

3) Soient E le milieu du segment $[AD]$ et I le point d'intersection de deux droites (AB) et (CD)

a) Vérifier que AEI est un triangle isocèle en E. . b) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{EI};\overrightarrow{ED}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$

4) a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{EI};\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$

b) Déduire que les deux droites (EI) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 16 : Soit A et B deux points distincts

1) Construire les ensembles suivants : $(\Gamma) = \left\{ M \in P \text{ tel que} : \left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \right\}$

et $(\Gamma') = \left\{ M \in P \text{ tel que} : \left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) \equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi] \right\}$

2) En déduire $E = \left\{ M \in P \text{ tel que} : \left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ; } k \in \mathbb{Z} \right\}$

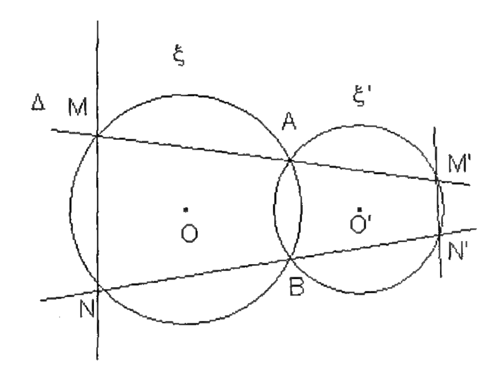
Exercice 17: Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC inscrit dans un cercle ξ de centre O tel que $AB < AC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. La bissectrice intérieure du secteur $[AB;AC]$ recoupe le cercle ξ en I et coupe $[BC]$ en D.

1) Montrer que le triangle IBC est isocèle en I.

2) Soit E un point de $[BC]$ distinct de B ; C et D. La droite (IE) recoupe ξ en F.

a) Vérifier que la tangente Δ à ξ en I est parallèle à (BC).

b) En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DA}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{FE};\overrightarrow{FA}}\right) + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$



Exercice 18 : On donne deux cercle ξ et ξ' sécants en A et B.
Soit Δ une droite passant par A ; non tangente ni à ξ ni à ξ' et recoupe ξ en M et ξ' en M'.
Soit Δ' une droite passant par B ; non tangente ni à ξ ni à ξ' et recoupe ξ en N et ξ' en N'.
Montrer que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

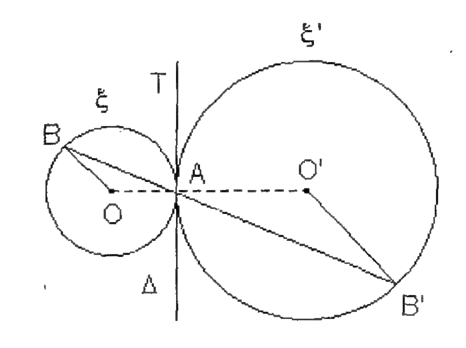
Exercice 19: Soit A et B deux points du plan orientés tel que AB = 6 .

1°/ Déterminer et construire les ensembles suivants :

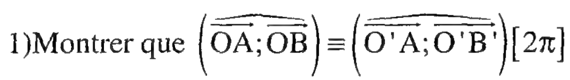
$$\zeta_1 = \{ M \in P \text{ , } MA^2 - 4MB^2 = 0 \} \text{ et } \zeta_2 = \left\{ M \in P, \left(\overrightarrow{MA} \,\hat{,}\, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \right\}$$

2°/ Soit $\{I\} = \zeta_1 \cap \zeta_2$. Montrer que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \sqrt{2} IB^2$

3°/ Calculer IA et IB. 4°/ Donner la valeur de $\overrightarrow{IA} . \overrightarrow{IB}$.



Exercice 20 : Soit ξ et ξ' deux cercles ; tangentes extérieurement en A, de centres respectifs O et O'. Soit B un point de ξ distinct de A . La droite (BA) coupe ξ' en B'


1)Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{O'A};\overrightarrow{O'B'}}\right)[2\pi]$

2)Montrer que les droites (OB) et $(O'B')$ sont parallèles.

Exercice 21 : Dans un plan oriente, on considère un triangle ABC direct non rectangle inscrit dans un cercle ζ de centre O .

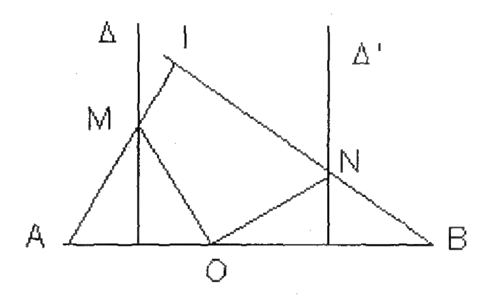
I, J et K sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A , B et C et H est l'orthocentre de ABC.

1)a) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB} \hat{,} \overrightarrow{AH}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{BA} \hat{,} \overrightarrow{BC}\right) [2\pi]$ .b) Montrer que $2\left(\overrightarrow{AB} \hat{,} \overrightarrow{AH}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{AO} \hat{,} \overrightarrow{AC}\right) [2\pi]$.

2) a / Montrer que les points B , K , J et C sont situé sur le même cercle . b/ Montrer que (JK) $\perp$ (OA) .

3) Montrer que $2\left(\overrightarrow{IK} \hat{,} \overrightarrow{IA}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{IA} \hat{,} \overrightarrow{IJ}\right) [2\pi]$

Exercice 22 : On donne un segment $[AB]$ et un point O de ce segment. Soit M un point variable sur la médiatrice Δ de $[OA]$ et N un point variable sur la médiatrice Δ' de $[OB]$ tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. Les droites (AM) et (BN) se coupent en I.



1)Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}\right) \equiv \pi[2\pi]$.

2) Sur quel ensemble varie le point I ?

Exercice 23 : A , B , C et M quatre points distincts d'un cercle ζ tel que $A \in \widehat{BC}$ et $M \in \widehat{CB}$, A' , B' , C' sont les projetés orthogonaux respectivement de M sur les droites (BC) , (AC) et (AB) .

1/ a) Montrer que A' , B' , C et M appartiennent à un même cercle .

b) En déduire que $\left(\overrightarrow{B'A'} \hat{,} \overrightarrow{B'M}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB} \hat{,} \overrightarrow{AM}\right) [2\pi]$

2/ a) Montrer que M , B' , C' , A appartiennent à un même cercle .

b) En déduire que $\left(\overrightarrow{B'M} \hat{,} \overrightarrow{B'C'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AM} \hat{,} \overrightarrow{AB}\right) [2\pi]$.

3/ En déduire que A' , B' , C' sont alignés

Exercice 24: Dans la figure ci-contre :

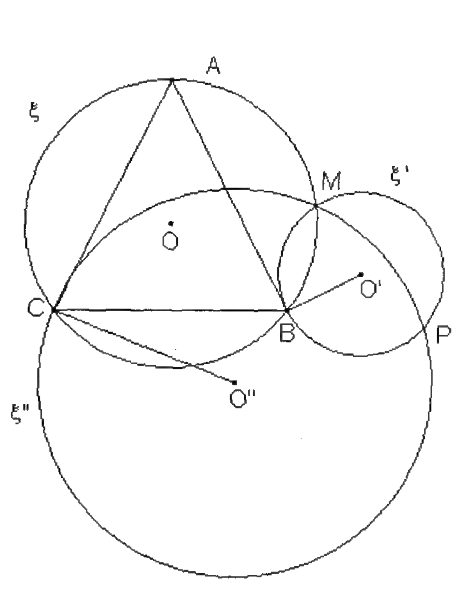
* ABC est un triangle isocèle de sommet principal A et ξ son cercle circonscrit

* M est un point de ξ distinct de A ; B et C.

* ξ' le cercle passant par M et tangent en B à la droite (AB)

* ξ'' le cercle passant par M et tangent en C à la droite (AC)

* ξ' et ξ'' se coupent en P.

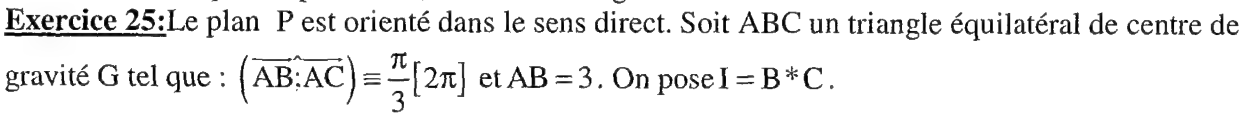


1) a) Comparer $2\left(\widehat{\overrightarrow{PB};\overrightarrow{PM}}\right)$ et $2\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM}}\right)$

b) Montrer que les points P ; B et C sont alignés.

2) a) Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right)[2\pi]$

b) En déduire que les points M ; A et P sont alignés.



Exercice 25: Le plan P est orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle équilatéral de centre de gravité G tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB = 3$. On pose $I = B * C$.



1) a) Vérifier que G est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(I;2)$

b) Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + 2MI^2 = \frac{27}{2}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

2) Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma)=\left\{M\in P/\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MC}}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$

3) a) Construire le point N appartient à (Γ) et vérifiant $\frac{1}{2}\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{CB}$.

b) Déterminer la mesure principale de $\left(\widehat{\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NC}}\right)$

Exercice 26 : BOO' un triangle dans un plan orienté tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BO'}}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$; ζ et ζ' deux cercle de centre respectifs O et O' qui passent par B et se coupent en un point A. Soit Δ une droite variable passant par A distincte de (OA) , (O'A) et (AB) ; Δ coupe ζ en C et ζ' en D .

1) a/ Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right)\equiv2\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OO'}}\right)[2\pi]$. b/ En déduire que $2\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right)\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

2) La droite (OC) rcoupe ζ en C' et la droite (O'D) recoupe ζ' en D'.

a/Montrer que A , C' et D' sont alignés . b/ Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{C'C},\overrightarrow{D'D}}\right)\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

3) Les droites (OC) et (O'D) se coupent en un point E . Montrer que E appartient au cercle (Γ) circonscrit au triangle BOO'

4) On désigne par I le centre du cercle circonscrit au triangle BCD . Montrer que I appartient à (Γ).

Exercice 27 : Soit ζ un cercle de centre Ω et de rayon $R=\frac{5}{2}$ dans un plan oriente O , A et B sont trois points de ζ tel que : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et C un point diamétralement opposé à B sur ζ .

1) Déterminer une mesure de l'angle orienté ($\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}$) , puis calculer AB.

2) Soit G le point défini par $\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$. La droite (CG) coupe ζ en un point K .

a/ Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}}\right)$.

b/ On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BK).

Exprimer $\overrightarrow{KH}$ en fonction de $\overrightarrow{KB}$ et en déduire que $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}=-\frac{1}{2}KB^2$.

c/ Montrer que $\frac{KB}{KA}=\sqrt{2}$. d/ Calculer KA et KB.

3) On désigne par I le point de rencontre de la bissectrice intérieure du secteur [KA , KB] avec [AB] .Calculer I A .

4) Déterminer et construire l'ensemble suivant $\Gamma=\left\{M\in P\ ;\ \frac{MB}{MA}=\sqrt{2}\right\}$

5) Γ et ζ se coupent en K'.Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{K'A},\overrightarrow{K'I}}\right)$

Exercice 28 : Le plan P est orienté dans le sens direct. On considère un triangle ABC isocèle de sommet principal A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)\equiv-\frac{23}{4}[2\pi]$, on désigne par (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et par (C') le cercle de centre A passant par B. 1) a) Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

b) Construire ABC, (C) et (C') .c) Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$.

2) Soit M un point variable du cercle (C) distinct de A et C appartenant à l'arc orienté $\overset{\frown}{CA}$, la droite (CM) recoupe (C') en D et la droite (BD) recoupe (C) en N. a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}})[2\pi]$.

b) En déduire que le triangle BMD est isocèle. Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DM})$.

c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{NM}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}})[2\pi]$ .d) En déduire que les droites $(AD) \perp (MN)$.

3) La droite Δ passant par C et perpendiculaire à (AM) coupe (BM) en I.

a) Montrer que lorsque M varie sur l'arc $\overset{\frown}{CA}$, le point I se déplace sur le cercle (C').

b) Soit α la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AM})$. Déterminer α pour que le triangle ICD soit isocèle en I.

Exercice 29 : Dans le plan orienté dans le sens direct on donne un triangle ABC tel que $BC = 2AB = 2a; (a \in IR_+^*)$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{-2009}{4}\pi[2\pi]$.

1) a) Construire sur la figure 1 le point A et le cercle ξ passant par B et C et tangent à (AB) en B. on désigne par O son centre et r son rayon.

b)Donner une mesure de $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ en déduire la nature du triangle OCB.

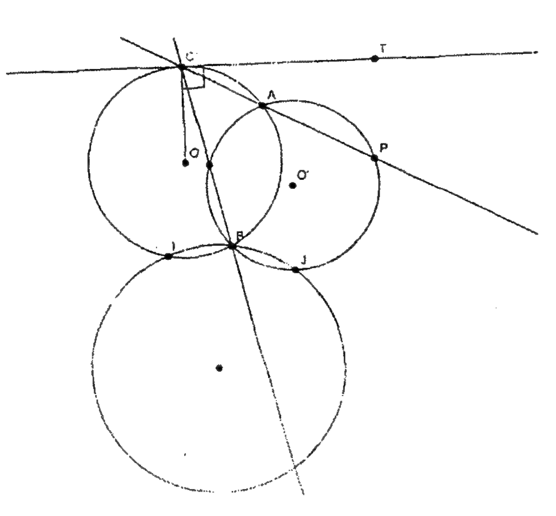
c)Calculer en fonction de a le rayon r et le déterminant de $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$.

2) a) Déterminer et construire $\Gamma = \left\{M \in P \text{ tel que } (\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$

b) Soit I le barycentre des points pondérés $(B;1);(C;2)$ et J celui de $(B;1);(C;-2)$. Montrer que l'ensemble $\Gamma' = \{M \in P \text{ tel que } MB = 2MC\}$ est le cercle de diamètre $[IJ]$ et construire Γ'.

3) Soit Ω le point d'intersection de Γ et Γ' et D le point de Γ' tel que $(\widehat{\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. La droite (DI) coupe (ΩJ) en un point K, Montrer que $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{JK}.\overrightarrow{J\Omega} = IJ^2$.

Exercice 30 : Dans le plan orienté, on considère deux cercles (ξ) et (ξ') de centre respectifs O et O' et sécants en deux points A et B. Soit C un point de (ξ) distinct de A et B et (CT) la tangente à (ξ) en C. La droite (CA) recoupe (ξ') en P et (CB) recoupe (ξ') en Q (Voir figure)



1) a) Montrer que $2(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CT}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PQ}})[2\pi]$

b) En déduire que $2(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{PQ}}) \equiv \pi[2\pi]$. Que peut-on dire de (OC) et (PQ).

2) Un cercle (ξ'') passant par B recoupe (ξ) en I et (ξ'') en J.

a) Montrer que $2(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BJ}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PQ}})[2\pi]$.

b) Soit K le point d'intersection des droites (CI) et (PQ) En déduire que $K \in \xi''$.



RESUME DU COURS

Définition : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit θ un réel et M le point du cercle trigonométrique de centre O tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta[2\pi]$. On appelle cosinus de θ , et on note cos θ , l'abscisse de M. On appelle sinus de θ , et on note sin θ , l'ordonnée de M.
Pour tout entier K et tout réel θ ,
$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ et $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$.

Propriétés : Pour tout réel θ , on a :
* $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. * $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ et $-1 \leq \sin\theta \leq 1$. * $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.
* $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$; $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$. * $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$; $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$.
* $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$. * $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$.

Définition : On appelle tangente de θ , le réel noté tan θ et défini par $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, pour tout réel θ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .Pour tout réel θ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$,on a : *$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$. * $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

Théorème : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .Pour tout point M du plan distinct de O , il existe un unique couple (r , θ) tel que > 0 , θ appartient à $]-\pi, \pi]$ et $\overrightarrow{OM} = r(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$ .Le couple (r , θ) appelé coordonnées polaires de M , est tel que r = OM et θ est la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. Réciproquement, pour tout couple (r , θ) tel que r > 0 et θ appartient à $]-\pi, \pi]$, il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = r(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$. M est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon r et de la demi – droite [OA) telle que $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) \equiv \theta\,[2\pi]$.

Propriété : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.Soit M un point du plan distinct de O , de coordonnées cartésiennes (x , y) et de coordonnées polaires (r , θ) . Alors :
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *et* $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Définition : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On désigne par $\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})$ et $\sin(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})$ respectivement le cosinus et le sinus d'une mesure quelconque de l'angle orienté ($\vec{u}, \vec{v}$).

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, de composantes (x , y) et (x' , y') dans une base orthonormée direct $(\vec{i}, \vec{j})$ .Alors $\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$ *et* $\sin(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$.

Formules de transformation :
* cos (a – b) = cos a cos b + sin a sin b ; * sin (a – b) = sin a cos b – sin b cos a
* cos (a + b) = cos a cos b – sin a sin b ; * sin (a + b) = sin a cos b + sin b
* $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$; sin (2a) = 2 sin a cos a

Propriété : Soit a et b deux réels. Sin a = sin b , si et seulement si , a = π - b + 2kπ , k Є Z.

Propriété : Soit a et b deux réels.cos a = cos b, si et seulement si, a = b + 2kπ, ou a = -b + 2kπ, k Є Z.

Propriété : Soit a et b deux réels de IR $/\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \text{ entier}\right\}$. tan a = tan b ⇒ a = b + kπ, k ∈ Z.

Propriété : Soit α un réel de [-1 , 1]. X_0 est solution de l'équation sin x = α , si et seulement si , $x_0 - a$ est solution de l'équation *sin* (x + a) = α.

Propriété : Soit α un réel de [-1 , 1]. X_0 est solution de l'équation cos x = α , si et seulement si , $x_0 - a$ est solution de l'équation cos (x + a) = α.

Exercices

Exercice 1 : L'une des réponses est correcte la quelle : 1) $\cos\frac{13\pi}{3} =$ a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\sin\frac{26\pi}{5} =$ a) $\sin\frac{\pi}{5}$ b) $-\sin\frac{\pi}{5}$ c) $\cos\frac{\pi}{5}$

3) Soit ABC un triangle non rectangle .

a) $\tan\left(\hat{A}+\hat{B}\right) = -\tan\hat{C}$ b) $\tan\left(\hat{A}+\hat{B}\right) = \tan\hat{C}$ c) $\tan\left(\hat{A}+\hat{B}\right) = \pi - \tan\hat{C}$.

4) Les coordonnées polaires du point de coordonnées cartésiennes $\left(-\sqrt{2};\sqrt{6}\right)$ sont :

a) $\left(2\sqrt{2};\frac{5\pi}{6}\right)$; b) $\left(2\sqrt{2};-\frac{\pi}{3}\right)$; c) $\left(2\sqrt{2};\frac{2\pi}{3}\right)$

5)Soit $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ *et* $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ où $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est une base orthonormée directe de l'ensembles des vecteurs du plan. a) $\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{-3}{5}$ b) $\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{3}{5}$ c) $\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{4}{5}$

6) $\cos\frac{15\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8} =$ a) 1 b) $2\cos\frac{\pi}{8}$ c) 0

7) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x =$ a) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ b) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ c) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

8) Pour tout réel x; $\cos(2x) =$ a) $2\cos x$; b) $2\cos^2 x - 1$; c) $1 - 2\cos^2 x$

9) Soit x un réel tel que $\sin x = \frac{1}{4}$ alors cos 2x est égal à :a) $-\frac{7}{8}$; b) $\frac{7}{8}$; c) $\frac{3}{4}$

10) L'ensemble des solutions de l'inéquation : $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$ est :

a) $S = \left]-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right[$; b) $S = \left]-\pi;-\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6};\pi\right[$; c) $S = \left]\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right[$

11) L'ensemble des solutions dans $[0,2\pi[$ de l'inéquation $1 + 2\cos x \geq 0$

a) $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ b) $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ c) $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3},2\pi\right]$

12)L'ensemble des solutions dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de l'inéquation $\sqrt{3} - \tan x \geq 0$ est

a) $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$ b) $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right]$ c) $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 2 : Répondre par vrai au Faux et Justifier la réponse

1) cos (a + b) = cos a + cos b . 2°/ $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x = 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

3)Dans le repères polaire $(O\ ,\ \vec{i})$ A et B ont pour coordonnées polaires $\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ alors la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ *est* $\frac{3\pi}{4}$.

4) Dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ on considère le point $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{3}\right)$. Les coordonnées polaires de A sont $\left(\frac{2}{3},\frac{-\pi}{6}\right)$.

Exercice 3 : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ soient : A (3, $3\sqrt{3}$) et B ($\sqrt{3}$, -1).
1)Montrer que triangle OAB est rectangle en O.
2) a) Déterminer les coordonnées polaires de A et B .b) Retrouver le résultat de la première question.

Exercice 4 : $\left(O,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$est un repère orthonormé direct du plan $\vec{u}$ est le vecteur tel que $\|\vec{u}\|=3$ *et* $\left(\widehat{\vec{j}\ ,\ \vec{u}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$.

Exercice 5 : Représenter dans un repère polaire l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées polaires (r, θ) vérifiant : a) $\begin{cases} r=\frac{3}{2} \\ \theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\end{cases}$; b) $\begin{cases}\theta=\frac{3\pi}{4} \\ r\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$ c) $\begin{cases} r\in[1,3] \\ \theta=\frac{-\pi}{4}\end{cases}$; d) $\begin{cases} r=3 \\ \theta\in\left]\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\right[\end{cases}$

Exercice 6 : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ on considère les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 de coordonnées polaires M_1 (5 , 0) ; M_2 (-1 , π) , M_3 ($\sqrt{5}$, $\frac{\pi}{2}$) et $M_4\left(\sqrt{5}\ ,\ \frac{-\pi}{2}\right)$.

1) a) placer les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 .
b) Montrer que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont situés sur le même cercle ζ dont on précisera les centre le rayon.
2) Soit le point M_5 de coordonnées polaires $\left(r,\ \frac{\pi}{6}\right)$ .Déterminer pour r que M_5 appartienne à ce cercle

Exercice N°7 : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. On donne les points $A(0;1)$ et $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

1) a) Déterminer les coordonnées polaires de A et B . b) Placer les points A et B et C tels que $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$
2) a) Déterminer les coordonnées cartésiennes de C.
b) Donner la nature du quadrilatère OACB, puis montrer que $\left(\vec{i};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$

c) Déduire les coordonnées polaires de C.

3) En déduire les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice8 : 1°/ Vérifier que pour tout réel x on a

a)$(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$. b)$\sin^6x+\cos^6x+3\sin x\cos x=1$

2°/ Montrer que pour tout réel x on a : $\cos^2 x-\cos x-6<0$

Exercice 9 : 1°/ Montrer que pour tout réel x on a : $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin x$

2°/ a) Montrer que pour tout x on a : $1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)$

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$

Exercice 10 : Soit x et y deux réels

1°/ Montrer que $(\sin x-\sin y)(\sin x+\sin y)=\sin^2x\cos^2y-\sin^2y\cos^2x$.

2°/ Montrer que : $(\cos x-\cos y)^2=(1-\cos x\cos y)^2-\sin^2x.\sin^2y$.

3°/ Montrer que pour tout $x\in IR/\{K\pi\}$ on a : $\text{Cotg}^2x-\cos^2x=\text{cotg}^2x\times\cos^2x$

Exercice 11 : 1°/ Soit $x\in IR$, montrer les égalités suivantes :

* $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. * $\sqrt{3}\cos\left(3x+\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(3x+\frac{\pi}{12}\right)=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

* $-2\sin^2\frac{x}{2}+\sqrt{3}\sin x+1=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

2) a) Montrer que $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ .b) Montrer que : $1-\cos x-\sin x=2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

3°/Montrer que : $2+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=4\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

Exercice12 : 1)a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}:\cos 2x-\sin 2x+1=2\cos x(\cos x-\sin x)$

b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}:\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

2) Résoudre dans $[0,2\pi[$ l'équation $\sin 2x-\cos 2x=1$

3)a) Montrer que pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[:\frac{2\cos 2x}{\cos 2x-\sin 2x+1}=1+\tan x$. b) En déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$

Exercice N° 13 : Soit $f:IR\to IR;x\mapsto\cos 2x-\sin 2x+1$

1) a) Calculer $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$; b) Montrer que $\forall x\in IR$; $f(x)=2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

c) Résoudre dans IR puis dans $[0;\pi]$ l'équation $f(x)=0$

2) Soit $g:[0;\pi]\to IR;x\mapsto\frac{-1+\sin 2x}{f(x)}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de g ; b) Montrer que $\forall x\in D;g(x)=\frac{-1+\tan x}{2}$

c) Calculer $g\left(\frac{\pi}{8}\right)$; en déduire $\tan\frac{\pi}{8}$; d) Résoudre dans D l'équation $\sin 2x+\left(1-\sqrt{2}\right)\cos 2x=1$

Exercice N° 14 : 1) On pose $A(x)=\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x ; x\in IR$.

a) Ecrire $A(x)$ sous la forme : $r\cos(2x-\varphi)$ avec $r>0$.

b) Prouver que $A(x)=4\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)-2$ et en déduire que $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) Résoudre dans IR, et dans $[0,2\pi[$ $A(x)=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

2) On considère un triangle ABC isocèle en A tel que $AB=4$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)\equiv-\frac{63}{4}\pi[2\pi]$; ξ est le cercle de centre O et de rayon r, est circonscrit à ABC. La droite perpendiculaire à (AB) en A recoupe ξ en un point D.

a) Faire une figure et calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}}\right)$, prouver que $\left(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$.

b) En déduire les valeurs de r et de $\det\left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}\right)$

c) Soit A' le symétrique de A par rapport à (BC). Déterminer la mesure principale de $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B};\overrightarrow{A'C}}\right)$ en déduire et représenter l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Exercice 15 : Soit $x\in\left]0\ ,\ \pi\right]$ 1°/ Montrer $\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2=1+\sin x$

2°/ $(O\ ,\vec{i}\ ,\ \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et M de cordonnée $X=\frac{\cos x}{\sqrt{2+2\sin x}}$ et $Y=\frac{1+\sin x}{\sqrt{2+2\sin x}}$

a)Vérifier que $X^2+Y^2=1$ .b)Sur quelle ligne se déplace le point M lorsque x varie dans $]0,\pi[$

3°/ a) Montrer que $X=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ et $Y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

b) Déterminer l'ensemble des points M lorsque x varie dans $]0\ ,\ \pi[$

Exercice N° 16 : Pour tout réel x ; on pose $U(x)=\sin(\pi x)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1) a) Calculer $U(1)$, $U\left(-\frac{1}{3}\right)$; $U\left(\frac{3}{2}\right)$ et $U\left(\frac{5}{3}\right)$

b) Montrer que pour tout réel x et pour tout entier relatif k, on a : $U(x+4k)=U(x)$

2) a) Montrer que pour tout réel x, $U(x)=-4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

b) Calculer alors les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ .c) En déduire que $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}+1$

3) Résoudre dans IR puis dans $[0;2[$ l'équation : $U(x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=0$.

Exercice 17 : 1°/ Soit f(x) = 1 + sin2x – cos2x

a)Montrer que pour tout $x \in IR$; $f(x) = 2\sqrt{2}\ \sin x.\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.b)En déduire la valeur de $\sin\frac{\pi}{12}$

2°/ Soit $g(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) . \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Montrer que pour tout $x \in IR$ on a : g(x) = 1 + sin 2x.

3°/ Soit $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. a)Déterminer D_h.

b)Vérifier que $h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cot x$. c)Donner les valeurs de $\tan\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$.

Exercice 18 : 1) Montrer que pour tout réel x on a : sin 5x = 16 $\sin^5$ x – 20 $\sin^3$ x + 5 sin x .
2) Soit l'équation (E) : $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$.

a/ Montrer que $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$ sont deux solution de l'équation (E) .

b/ Résoudre dans IR l'équation (E). c/ En déduire $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.

Exercice19 : Résoudre dans $[0, 2\pi[$ les équations suivantes :a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos x = \frac{1}{2}$; c) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

d) sin2x + sin cos x = 0 ; e) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 20 : 1°/ Résoudre dans IR, puis dans $]-\pi , \pi]$. a) cos 2x + cos x = -1 ; b) $\sin|x| = \frac{1}{2}$;

c) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; d) $\cos^2 x = \sin^2 x$; e) $\cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x = 1$; f) tan x + tan3x = 0 ;

g) $\tan(2x)\cot(3x - \frac{\pi}{3}) = 1$

Exercice 21: Résoudre dans IR a) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; b) $\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0$;
c) $(\sqrt{2}+1)\sin^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos^2 x + \sin 2x = \sqrt{2}$; d) $(\cos x - \sin x)^2 = \frac{1}{2}$; e) $\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0$

Exercice 22 : Résoudre dans $[0 , 2\pi[$ a) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\cos x \geq \frac{1}{2}$, c) $\sqrt{1 - \cos x} > \sin x$
d) $\sqrt{2}\sin x + 1 < 0$, e) $2\sin 2x - \sqrt{3} \leq 0$

Exercice 23 : Résoudre dans $[0 , \pi]$ a) $4\sin^2 x - 1 \leq 0$, b) $\cos 2x + \sin 2x - 1 \geq 0$;c) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} < 0$

Exercice 24 : Résoudre dans IR puis dans $[0 , \pi]$ a) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{2}-1)\cos x - \sqrt{2} > 0$

; b) $\sqrt{3}\ \tan^2 x - (1+\sqrt{3})\tan + 1 < 0$; c) $\frac{\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x}{2\sin x - 1} \geq 0$; d) $\frac{1 - \sin 2x}{\sin 2x} \geq 1$

Exercice 25: A/ Soit la fonction f(x) = 3 cos x + 16 $\cos^5$ x – 16 $\cos^3$ x .
1) Montrer que pour tout x ∈ IR on a : f(x) = cosx (1 + 2 cos 4x)

2) Résoudre dans IR ; f(x) = 0 . 3) Etudier le signe de f(x) sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

B/ Soit la fonction g : $[0, \pi] \to IR$; $x \mapsto \dfrac{\sin x - \sin 3x + \sin 5x}{f(x)}$

1) Déterminer le domaine de définition Dg de g . 2) Montrer que g(x) = tan x .

3) Montrer que $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$. 4) Résoudre l'inéquation $g(x) < 2-\sqrt{3}$

Exercice N°26 :

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = 1-\cos 2x + \sin 2x$ et $g(x) = \dfrac{f(x)}{2\sqrt{2}\cos x \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$

1) a) Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$; b) Montrer que $\forall x \in IR ; f(x) = 2\sqrt{2}\sin x \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

c) En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$

2) a) Déterminer l'ensemble de définition de g. ; b) Simplifier $g(x)$

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ et (ξ) est le cercle trigonométrique de centre O.

a) Représenter l'ensemble des points M de (ξ) tel que $(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OM}}) \equiv x\,[2\pi]$ et $g(x) \le 0$

b) Résoudre dans IR $g(x) \le 0$

Exercice 27 : Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ .1) a/ Déterminer D_f . b/ Comparer f(x) et $f(x+\pi)$.

2) Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f(x) = \dfrac{(\sin x - \cos x)(4+2\sin 2x)}{\sin^2 2x}$

3) a/ Résoudre dans $[0, \pi]$: sinx – cosx = 0 . b/ Donner le signe de f(x) sur $D_f \cap [0, \pi]$

4) Soit $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Déterminer $D_g \cap [0, \pi]$

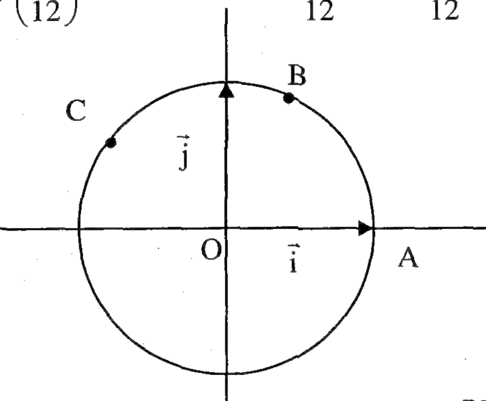
Exercice 28 : 1) Résoudre dans IR puis dans $[-\pi, \pi]$ l'équation $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 2\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

2) Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x - 2\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)}{1-2\sin^2 x}$. a/ Déterminer D_f

b/ Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f(x) = -4\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ .c/ Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et en déduire $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\cos\dfrac{\pi}{12}$

d/ Résoudre l'équation $(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x \le 2$

Exercice 29 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on désigne par ζ le cercle trigonométrique de centre O et par A ; B et C les points de ζ tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{j}$; $(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OB}}) \equiv \dfrac{2\pi}{5}[2\pi]$ et $(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OC}}) \equiv \dfrac{4\pi}{5}[2\pi]$.



1) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A ; B et C.

2) Construire dans la figure ci-contre les points

D et E de coordonnées cartésiennes respectives $\left(\cos\frac{6\pi}{5};\sin\frac{6\pi}{5}\right)$ et $\left(\cos\frac{8\pi}{5};\sin\frac{8\pi}{5}\right)$

3) a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{BO}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BO};\overrightarrow{OE}})[2\pi]$ .b) En déduire que $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OB}$

c) Montrer alors que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$

4) a) Montrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$

b) Déduire que $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$ et $\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{5}=0$

5) a) Montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une solution de l'équation $4X^2+2X-1=0$

b) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$

6) Résoudre dans $[0;2\pi[$; $0\le 4\cos x+2\le 1+\sqrt{5}$

Exercice 30 : Pour tout x, on pose $f(x)=\cos 2x-3\cos x+2$

1) a) Vérifier que pour tout réel x, on a : $(\cos x+\sin x)^2=1+\sin 2x$

b) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}$

c) Montrer alors que $f\left(\frac{11\pi}{12}\right)+f\left(\frac{7\pi}{12}\right)-f\left(\frac{5\pi}{12}\right)-f\left(\frac{\pi}{12}\right)=3\sqrt{6}$

2) a) Vérifier que pour tout réel x on a $f(x)=2\cos^2 x-3\cos x+1$

b) Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'inéquation $f(x)>0$

3) On pose $g(x)=\frac{\tan 2x}{\sqrt{f(x)}}$; résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$; l'inéquation $g(x)\le 0$

Exercice N°31 : 1) Résoudre dans IR les équations suivantes :a) $\cos(2x)=0$; b) $2\sin(2x)+\sqrt{3}=0$.

2) En déduire les solutions, dans $[0;\pi]$, de l'équation $\sin(4x)+\sqrt{3}\cos(2x)=0$

Exercice N° 32 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $x\mapsto 1-\sin 2x+\cos 2x$

1) a) Montrer que $\forall\, x\in \mathbb{R}$; $f(x)=2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

b) Résoudre dans IR puis dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x)=0$

2) Soit $g:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$; $x\mapsto\frac{\sqrt{2}\cos 2x}{f(x)}$ .a) Déterminer le domaine de définition D de g

b) Montrer que $\forall x\in D$; $g(x)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$

c) Calculer $g\left(\frac{\pi}{12}\right)$ En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$; d) Résoudre dans D l'équation $g(x)=1$

Exercice N°33 : Soit $A(x)=\cos 2x+\sin 2x$; $x\in[0;2\pi[$

1) Calculer $A(0)$ et $A\left(\frac{\pi}{8}\right)$; 2) Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'équation $A(x)=0$

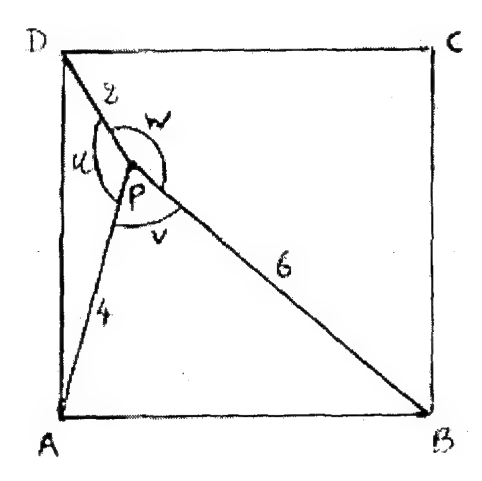
3) a) Montrer que $A(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$; b) En déduire que $A(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

4) Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'inéquation : $A(x)\geq 1$

Exercice N°34 : n étant un entier naturel non nul résoudre l'équation $\cos^n x-\sin^n x = 1$

Exercice 35 Trouver tous les réels x de l'intervalle $[0;2\pi]$ tels que $2\cos(x) \leq \left|\sqrt{(1+\sin(2x))}-\sqrt{(1-\sin(2x))}\right| \leq \sqrt{2}$

Exercice N°36 : Sur le parchemin ci-dessous ne figurent qu'un carré, 3 segments et 3 indications de longueur : PD=2, PA=4, PB=6. Déterminer l'angle(DPA) , de sommet P.





Devoir De contrôle N° 1 exemple 1

Exercice N° 1 : Cocher la réponse exacte :

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs : $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$ si et seulement si :
a) $\vec{u} = \vec{v}$ b) $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = -\vec{v}$ c) $(\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v})$

2. A et B deux points du plan tel que $AB = 1$. Soit M un point de (AB) vérifiant $\vec{AM}.\vec{AB} = -2$ alors :
a) $M \in [AB]$ b) $M \in [BA) - [BA]$ c) $M \in [AB) - [AB]$

3. ABC est un triangle équilatéral de côté 4. I le milieu de [AC], H le milieu de [BC] et D le projeté orthogonal de I sur (AH).a) $\vec{DC}.\vec{AB} = 0$ b) $\vec{DB}.\vec{DC} = 0$ c) $\vec{AD}.\vec{BH} = 0$

4. La fonction $f : x \mapsto 4 - x^2$ est décroissante sur :a) $[0;+\infty[$ b) $[-2;+\infty[$ c) $]-\infty;0]$

5. Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + 1$ définie sur IR+ :a) f est bornée b) f est majorée c) f est minorée

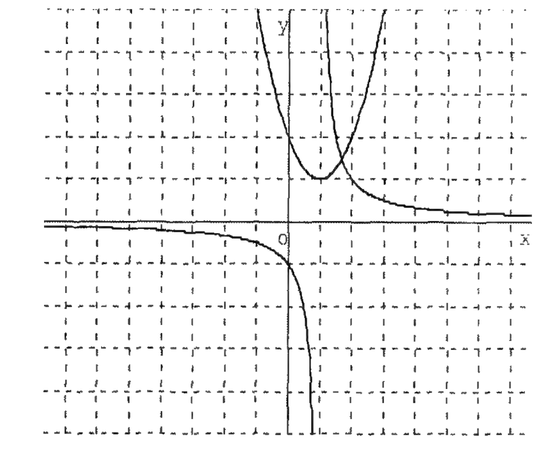
6. f est une fonction décroissante sur R : $f(1) = 7$ et $f(6) = -4$.
Alors pour tout $x \in [1;6]$, on a f(x) appartient à l'intervalle :a) $[0;5]$ b) $[-3;6]$ c) $[-3;\sqrt{35}]$

Exercice N°2 : On considère les fonctions g et h définies par $g(x) = x^2 - 5x + 6$ et $h(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 5x + 6}$

1.Montrer que g est minorée par $-\dfrac{1}{4}$ sur IR.

2.Montrer que ce minorant est un minimum sur IR. En déduire un majorant de h sur $]2;3[$.

Exercice N° 3 :



Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $g(x) = (x-1)^2 + 1$. On désigne par (C) et (C') les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1)a) Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = g(x)$ admet dans R une solution unique α.
b) En déduire que α l'unique solution dans R de l'équation : $x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$.
c) Montrer que $1,6 < \alpha < 1,7$.

2)Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leq f(x)$.

3)Quelle est l'image par f de l'intervalle [-1 ; 1[et l'image par g de l'intervalle $[\dfrac{1}{2};2]$?

4)Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[1; f(\alpha)]$.

Exercice N° 4 :

Le plan P est orienté dans le sens direct.

Soit AIC un triangle isocèle rectangle en C tel que $(\widehat{\vec{CA},\vec{CI}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $CA = 2\sqrt{2}$.

Soit B le symétrique de A par rapport à I et H le projeté orthogonal de B sur (AC).

1. Calculer $\vec{IB}.\vec{IA}$ et $\vec{CA}.\vec{CB}$
2.
a. Calculer HB et CB.
b. Montrer que $\cos(B\hat{C}I) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
3. Soit G le centre de gravité du triangle ABH.

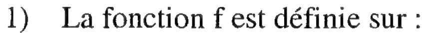
On considère l'application $f : P \to R$; $M \mapsto f(M) = \vec{MA}.\vec{MB} - \frac{2}{3}\vec{HI}.\vec{MG}$

a. Calculer $f(H)$.
b. Vérifier que $f(G) = GI^2 - IA^2$ et donner la valeur de f(G).
c. Montrer que pour tout point M de P, on a : $f(M) = f(G) + MG^2$.
d. Déterminer l'ensemble $(E) = \left\{ M \in P \; ; f(M) = -\frac{119}{9} \right\}$.

Devoir De contrôle N° 1 exemple 2

Exercice N°1 : Dans la figure ci-dessous C est la représentation graphique d'une fonction f et les droites : $\Delta_1 : x = 2$; $\Delta_2 : x = -2$ *et* $\Delta_3 : y = 2$.

Cocher la ou (les) réponse(s) correcte(s) :



1) La fonction f est définie sur :

a) $IR/\{-2\}$; b) $IR/\{2\}$; c) $IR/\{-2 , 2\}$

2) La fonction f est continue sur :

a) $IR/\{-2 , 2\}$; b) $IR/\{2\}$; d) $[3 , +\infty[$

3) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$;

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; d) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$



4) a) L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-2 , 2[$

b) L'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique dans $]-\infty , -2[$

c) L'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions dans $IR/\{-2 , 2\}$

d) L'équation $f(x) = 5$ admet exactement deux solutions dans $]-3 , 2[$

Exercice N° 2 :

Soit la fonction f définie sur R^* par : $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{1+x^2} & si \quad x \in]-\infty;0[\\ f(x) = 2x + \dfrac{1}{x} & si \quad x \in]0;+\infty[\end{cases}$

1. Soit g la restriction de f à $]0;+\infty[$ et a et b deux réels distincts et strictement positifs.

a. Vérifier que $g(a) - g(b) = \dfrac{(a-b)(2ab-1)}{ab}$.

b. En déduire le sens de variation de g sur chacun des intervalles $]0;\dfrac{1}{\sqrt{2}}]$ et $[\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty[$.

c. Montrer alors que g est minorée par $2\sqrt{2}$ sur $]0;+\infty[$ et que $2\sqrt{2}$ est un minimum de g sur $]0;+\infty[$.

Soit h la restriction de f à $]-\infty;0[$.

Montrer que h est minorée par 0 sur $]-\infty;0[$. En déduire que f est minorée sur IR^*.

Exercice N° 3 :

Soit la fonction f définie sur $R\backslash\{1\}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^3 + x^2 - 1 & si \quad x \le 0 \\ f(x) = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{x^2 - 1} & si \quad 0 < x \le 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} & si \quad x > 2 \end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{3} f$ et $\lim\limits_{1} f$.

b) f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui définir ce prolongement.

2) Etudier la continuité de f en 0 et en 2.

Exercice N° 4 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que AC=a ; AB=2a et $B\hat{A}C = \frac{2\pi}{3}$ et on désigne par I le milieu de [BC].

1) a) Calculer $\vec{AB}.\vec{AC}$
   b) Calculer BC

2) a) Exprimer $\vec{AI}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
   b) Montrer que les droites (AI) et (AC) sont perpendiculaires.

3) a) Montrer que pour tout point M du plan, $MB^2 - MC^2 = 2\vec{MI}.\vec{CB}$
   b) Déterminer l'ensemble des points M tel que : $MB^2 - MC^2 = 7a^2$

4) Déterminer l'ensemble des points M tel que $\vec{MA}.\vec{MB} + \vec{MA}.\vec{MC} = 0$

5) Soient E le milieu de [AB] et F le point définie par : $\vec{AF} = \alpha\vec{AC}$.
Déterminer α pour que (BC) soit perpendiculaire à (EF).



Devoir de synthèse N° 1 exemple 1

Exercice N° 1 : Répondre par vrai ou faux :

1. Si f n'est pas définie en a alors f n'admet pas de limite en a.
2. Si f n'est pas continue en a alors f n'admet pas de limite.
3. f admet une limite en a, si et seulement si, f admet une limite à droite en a ou à gauche en a.
4. Si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas continue à droite en a.
5. Pour que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, il suffit que $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
6. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tel que $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \dfrac{3024\pi}{4}[2\pi]$. Alors la mesure principale de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est $\dfrac{\pi}{4}$.
7. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
8. Si $(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) \equiv \alpha[2\pi]$ alors $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \pi - \alpha[2\pi]$.

EXERCICE N°2:

I) Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1-x^3}{x^2+x-2}$ et soit (C_g) sa courbe dans un repère du plan.

1) Déterminer le domaine D_g de la fonction g.

2) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

b) Calculer : $\lim\limits_{x\to(-2)^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^+} g(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3)a)Montre que g est prolongeable par continuité en 1. Définir son prolongement h par continuité en 1 .

b) Montrer que h est continue sur IR \ {-2}.

II) Soit la fonction f définir sur IR \ {-2} par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} - x & si\ x \geq 1 \\ -\dfrac{1+x+x^2}{x+2} & si\ x \prec 1 \end{cases}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) Montrer que f est continue en 1.

2) a) Vérifier que pour tout réel $x \in [1,+\infty[$ on a : $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$.

b) Calculer alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que pour tout réel $x \in]-\infty,1[$ on a : $f(x) = -x + 1 - \dfrac{3}{x+2}$.

b)Montrer que la droite D : y = - x + 1 est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

c) Préciser les positions relatives de (C_f) par rapport à D sur l'intervalle $]-\infty,1[$.

Exercice N° 3 : Le plan est orienté dans le sens direct. On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle (ξ) tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{37\pi}{6}[2\pi]$

1) a) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ .b) Faire une figure.

2) On considère le point D sur le cercle (ξ) tel que $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}}) \equiv -\frac{95\pi}{3}[2\pi]$

a) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})$

b) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$. En déduire que les deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

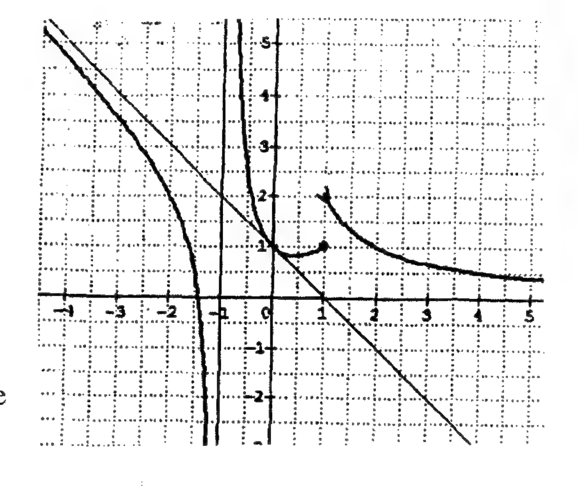
3) Soient E le milieu du segment $[AD]$ et I le point d'intersection de deux droites (AB) et (CD).

a) Vérifier que AEI est un triangle isocèle en E. . b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{EI};\overrightarrow{ED}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}})[2\pi]$.

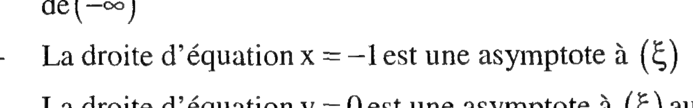
4) a)Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{EI};\overrightarrow{BC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}})[2\pi]$ .b)Déduire que les deux droites (EI) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice N° 4 : Dans le plan P, orienté dans le sens direct, on considère un triangle rectangle en A, tel que $AB = 2$; $AC = 1$ et $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ }\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.On désigne par K le milieu du segment [AB] et par L le milieu du segment [BC]. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). H se projette orthogonalement en I sur (AB) et en J sur (AC). On considère le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AC})$.

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C et L.
2. Soit (x ; y) les coordonnées du point H. Exprimer $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$ et $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH})$ en fonction de x et y.
3. En déduire que H a pour coordonnées $(\frac{2}{5};\frac{4}{5})$.
4. Prouver que les droites (IJ) et (AL) sont perpendiculaires.



Exercice N° 5 : Soit f une fonction définie sur $IR \setminus \{-1\}$ dont la courbe représentative (ξ) est donnée ci-contre : La droite d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $(-\infty)$



- La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à (ξ)
- La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $(+\infty)$
- Pour tout $x > 1$; $f(x) > 0$
- $f(0) = f(1) = f(2) = 1$ En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :

1) f est-elle continue en 1 ?

2) Déterminer, en justifiant, les limites suivantes :a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; c) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$; d) $\lim\limits_{x \to -1} |f(x)|$; e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)-1}{f(x)}$; f) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x)}{f(x)-1}$ g) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x$; h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)-2x}{x+1}$.



Devoir de synthèse N° 1 exemple 2

Exercice N° 1 : Pour chaque question **donner la réponse exacte**.

1. Si une fonction f définie en 3 tel que $\lim_{3} f = 4$ a) f est continue en 3 b) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$ c) f(3)=4
2. Si une fonction f est continue sur [-2 ;5] et f(-2)=1 et f(5)=-4 : a) L'équation f(x)=-1 n'admet pas de solution dans [-2 ;5] b) L'équation f(x)=0 admet une seule solution dans [-2 ;5]
   c) L'équation f(x)=0 admet au moins une solution dans [-2 ;5]

3. A et B deux points distincts du plan, quel est l'ensemble des points M du plan vérifiant :
$\vec{AM}.\vec{MB} = 0$ a) La droite perpendiculaire à (AB) en A b) La médiatrice de [AB] c) Le cercle de diamètre [AB] privé de A et B d) Le cercle de diamètre [AB] e) La droite perpendiculaire à (AB) en B

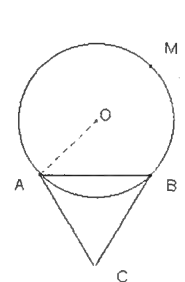
4)Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tel que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \frac{59\pi}{7}[2\pi]$

a)La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $-\frac{4\pi}{7}$

b) La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{11\pi}{7}$ .c) La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{3\pi}{7}$

5)Si une fonction f est continue sur [-1 ;5[alors a) f est continue à gauche en 5 b) f est continue en (-1) c) $\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = f(-1)$

6) Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ACB un triangle équilatéral et (Γ) le cercle de centre O passant par A et B et tangent à $[AC]$ en A. On désigne par M un point de l'arc $\widehat{BA} \setminus \{A;B\}$ du cercle (Γ).




a) La mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})$ est : *) $\frac{\pi}{6}$; **) $\frac{\pi}{3}$; ***) $-\frac{\pi}{3}$


b) L'ensemble des points N du plan tel que $(\widehat{\overrightarrow{NA};\overrightarrow{NB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ est :

* $\overset{\frown}{BA} \setminus \{A;B\}$; **) $\overset{\frown}{AB} \setminus \{A;B\}$; ***) $(\Gamma) \setminus \{A;B\}$

Exercice N° 2 : 1)Soit g la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$.

a)Montrer que g est continue sur $[-1;+\infty[$. b)Montrer que g est décroissante sur $[-1;+\infty[$.
c)En déduire que g est majorée sur $[-1;+\infty[$. d)Déterminer $g([-1;0])$.

2)Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

a)Déterminer le domaine de définition de f. b)Calculer la limite de f en 3.
c)Donner un prolongement par continuité de f en 3.
3)Soit h la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} h(x) = f(x) \quad si \quad x \in]3;+\infty[\\ h(x) = \dfrac{x^3-9}{x^3-3x^2+x-3} \quad si \quad x \in]-\infty;3[\\ h(x) = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

a)Etudier la continuité de h à droite en 3.
b)Etudier la continuité de h à gauche en 3.
c)H est-elle continue en 3 ?

Exercice N° 3 :
Le plan est orienté dans le sens direct. On considère les points A, B, C, D et E tel que
$(\vec{AB}\,\hat{,}\,\vec{AC}) \equiv -\frac{23\pi}{10}[2\pi]$; $(\vec{AC}\,\hat{,}\,\vec{AE}) \equiv -\frac{47\pi}{10}[2\pi]$ et $(\vec{AB}\,\hat{,}\,\vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{5}[2\pi]$

1. Déterminer la mesure principale de chacun des angles $(\vec{AB},\vec{AC})$ et $(\vec{AC},\vec{AE})$.
2. Montrer que les points A, B et E sont alignés.
3. Montrer que $(AC) \perp (AD)$.

Exercice N°4 : OABC est un carré de centre w du plan P tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par (ξ) le cercle de centre O et passant par A et C.

1) a) Déterminer l'ensemble $\Gamma = \left\{M \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$

b) Placer le point D tel que : $DA = DC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

c) Calculer la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}\right)$ puis celle de l'angle $\left(\overrightarrow{CO};\overrightarrow{CD}\right)$.

2) La droite perpendiculaire à (AD) en D et la droite (OC) se coupent en L.

a) Montrer que les points A ; O ; D et L appartiennent à un même cercle.

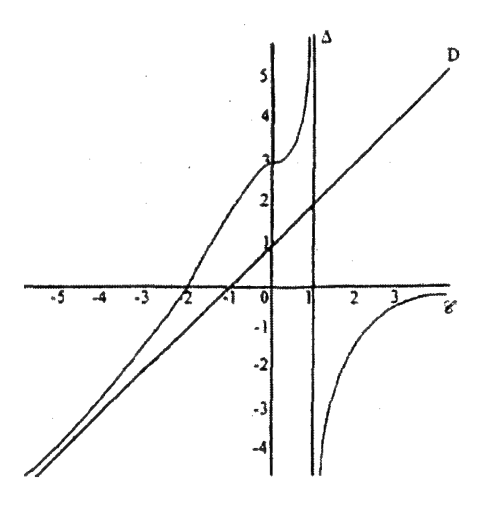
b) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{LD};\overrightarrow{LO}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AO}}\right) + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ puis $\left(\widehat{\overrightarrow{LD};\overrightarrow{LO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AO}}\right)[2\pi]$.

c) En déduire $\left(\widehat{\overrightarrow{LD};\overrightarrow{LO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CO};\overrightarrow{CD}}\right)[2\pi]$ et par suite L appartient à un cercle γ de centre O dont on précisera le rayon.

d) Montrer que les droites (CD) et (AL) sont parallèles.

e) Montrer que (DC) est tangente au cercle γ' de diamètre $[AL]$.

Exercice N° 5 : La courbe ξ représentée ci-contre est celle d'une fonction définie sur $IR \setminus \{1\}$ L'axe des abscisses et les droites D et $\Delta : x = 1$ sont des asymptotes à ξ



1) a) Déterminer $f([-2;+\infty[)$

b) Déterminer une équation de l'asymptote à ξ au voisinage de $-\infty$

2) Soit $g = \frac{1}{f}$ a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Montrer que g est prolongeable par continuité en 1.

c) Etudier la limite de g en (-2) ;

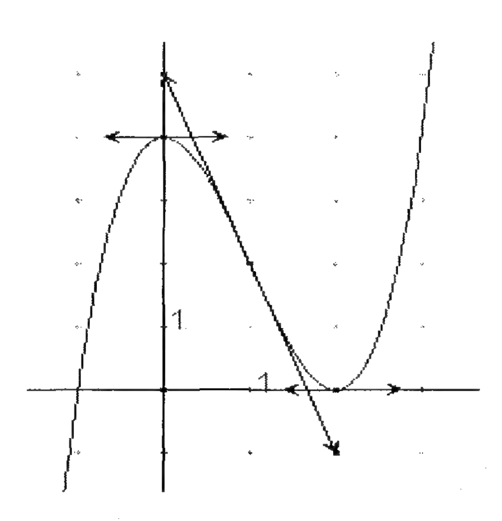
d) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

e) Montrer que g est décroissante sur $[0;1[$



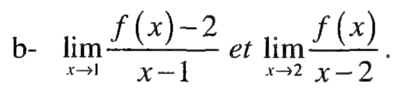
Devoir de contrôle N°2 exemple 1

Exercice N° 1: Soit la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et représentée par la courbe ζ ci-dessous :



1) Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes :

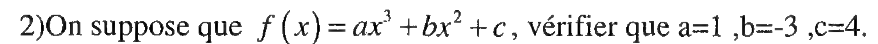
a- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.



b- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}$ *et* $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}$.

c- Dresser le tableau de variation de f .

d- Déterminer, suivant les valeurs de m ; ou m est un paramètre réel le nombre de solution de $\begin{cases} f(x)=m \\ 0 \langle x \langle 2 \end{cases}$



2)On suppose que $f(x)=ax^3+bx^2+c$, vérifier que a=1 ,b=-3 ,c=4.

3)Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+4x-1$.

a- Vérifier que $g'(x)=f(x)$.

b- Déduire le tableau de variation de g.

Exercice N° 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit C la courbe représentative de la fonction $f: x \to \dfrac{(x-3)(4x-3)}{(x-2)^2}$ et C' la courbe représentative de la fonction $h: x \to \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1. Montrer que les droites $D: y=4$ et $\Delta: x=2$ sont asymptotes à la courbe représentative de f.
2.
a. Montrer que la droite $\Delta': y=x+1$ est une asymptote oblique à (C').
b. Etudier la position de (C') par rapport à Δ'.

Exercice N° 3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit C la courbe représentative de la fonction $f: x \to x^3-3x+2$.

1. Montrer que f est dérivable en tout réel a et déterminer f'(a).
2.
a. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
b. Etudier la position de (C) par rapport à (T).
3.
a. Déterminer les points de (C) où la tangente est parallèle à la droite $D: y=9x+1$.
b. Déterminer les points de (C) où la tangente est perpendiculaire à l'axe des ordonnées.
4. Calculer : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-4}{-2h}$.

Exercice N° 4 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On donne les points A(2 ;2) et $B\left(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$.

1) Déterminer les coordonnées polaires de A.

2) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$. En déduire les coordonnées polaires du point B.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice N° 5 :

I- Soit x un réel. Calculer les expressions suivantes :

$A=\cos(\pi+x).\sin(\frac{3\pi}{2}-x)-\sin(\pi-x).\cos(\frac{3\pi}{2}-x)$

$B=\sin(3\pi-x)+\sin(\frac{9\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}+x)-\cos(2\pi-x)$

II- Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Représenter sur le cercle trigonométrique de centre O, l'ensemble des points M tel que $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})\equiv\theta[2\pi]$ et $\sin\theta>-\frac{1}{2}$.

b)Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ puis dans $]0;2\pi]$, $\sin\theta\leq-\frac{1}{2}$.

Corrigé

SOLUTIONS

Exercice N° 1 : 1) le point d'abscisse 0 a pour ordonnée 2 donc f(0) =2 de même on trouve f(2) =-2

2) les antécédents de 2 sont les abscisses des points de C_f d'ordonnée 2 et par suite les antécédents de 2 sont -4, 0 et 4

3) les solutions de l'inéquation f(x) ≥ 2 sont l'ensemble formé par les abscisses des points de C_f situés au-dessus de la droite d'équation y=2 donc S= $[-4,0]\cup[4,5]$

4) la fonction f est croissante sur chacun des intervalles $[-4,-2]$ et $[2,5]$

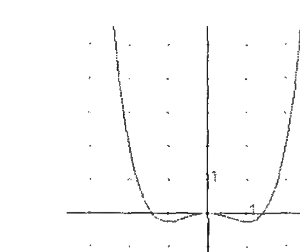
5)La fonction f est croissante sur chacun des intervalles $[-4,-2]$ et $[2,5]$. La fonction f est décroissante sur $[-2,2]$ f(2) =-2 et pour tout réel x de $[-4,5]$ $f(x)\geq -2$ et Par suite le minimum de f sur $[-4,5]$ est -2 et il est atteint en 2 ; f(5) =7 et f(2) =6 et pour tout réel x de $[-4,5]$, f(x) ≤ 7 .Donc le maximum de f sur $[-4,5]$ est 7 il est atteint en 5.

6)

x	-4		-2		2		5
f(x)	2	↗	6	↘	-2	↗	7

Exercice 2:

1) Voir courbe



2) f est croissante sur les intervalles $[-1,0]$ et $[1,2]$

f est décroissante sur les intervalles $[-2,-1]$ et $[0,1]$

Exercice 3 1. Parité de f :Soit $x\in\mathbb{R}^*, (-x)\in\mathbb{R}^*$ et on a

$f(-x)=(-x)+\frac{1}{(-x)}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ donc f est impaire.

Parité de g : Soit $x\in\mathbb{R}^*, (-x)\in\mathbb{R}^*$ et on a $g(-x)=(-x)-\frac{1}{(-x)}=-\left(x-\frac{1}{x}\right)=-g(x)$ donc g est impaire

2. Soient a et b deux réels non nuls tels que a < b

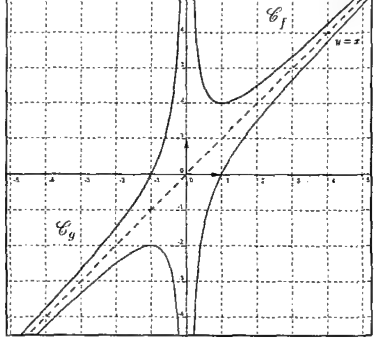
$f(a)-f(b)=a+\frac{1}{a}-\left(b+\frac{1}{b}\right)=a-b+\frac{b-a}{ab}=\underbrace{(a-b)}_{>0}\left(1-\frac{1}{ab}\right)$

- Si a et b∈ $[1,+\infty[$ alors $ab>1\Rightarrow\frac{1}{ab}<1\Rightarrow 1-\frac{1}{ab}>0\Rightarrow f(a)-f(b)>0\Rightarrow f(a)>f(b)\Rightarrow$ f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$
- Si a et b∈ $]0,1]$ alors $0<ab<1\Rightarrow\frac{1}{ab}>1\Rightarrow 1-\frac{1}{ab}<0\Rightarrow f(a)-f(b)<0\Rightarrow f(a)<f(b)\Rightarrow$ f est strictement décroissante sur $]0,1]$

Pour la fonction g, le cas est beaucoup plus simple.

En effet : $g(x)=x-\frac{1}{x}$ est la somme de deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}^*$, donc g est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^*$

3. f et g sont deux fonctions impaires donc leurs courbes sont symétriques par rapport à l'origine de repère.



Exercice N° 4 : 1) Faux ; 2) Vrai ; 3) Vrai ; 4) Faux ; 5) Vrai ; 6) Faux

Exercice N° 5 : a/ Faux car 0 n'a pas d'image par f donc $D_f=IR^*$

b/ Faux car lorsque x tend vers -∞ alors f(x) tend vers -∞

c/ Faux car ζ_f coupe la droite d'équation $y=-2$ en deux points.

d/ Faux car l'axe (y y') n'est pas l'axe de symétrie à ζ_f

Exercice N° 6 : 1) La réponse est c) car si a et b deux éléments de $[-1,+\infty[$ tel que $a\leq b$ alors $a+1\leq b+1$,or on a : $a+1\geq 0$ et $b+1\geq 0$ alors $(a+1)^2\leq(b+1)^2$ alors $-(a+1)^2\geq-(b+1)^2$ $\Leftrightarrow 1-(a+1)^2\geq 1-(b+1)^2$, $f(b)\leq f(a)$.

2) la réponse est c), car les majorants et les minorants doivent être des constantes (indépendants de x)

3) La réponse est b), $g(x)-f(x)=-5$ alors $C_g=t_{-5\vec{j}}(C_f)$

4) La réponse est b) car : $-1\leq\cos x\leq 1$ Pour tout $x\in IR$ $-3\leq 3\cos x\leq 3\Leftrightarrow -1\leq 2+3\cos x\leq 5$

5) i) La réponse est b)

ii) La réponse est b) , f décroissante sur $[-5,2]$ et 0,5 et 1,8 sont deux éléments de $[-5,2]$, $-0{,}5<1.8$ donc $f(1{,}8)<f(-0{,}5)$

Exercice N° 7 : 1)pour tout $x\in[-2,1]$, f est décroissante $\Leftrightarrow x\leq 1 \Rightarrow f(x)\geq f(1)$

pour tout $x\in[1,9]$, f est croissante $\Leftrightarrow x\geq 1 \Rightarrow f(x)\geq f(1)$ on peut donc conclure que pour tout $x\in[-2,9]$, $f(x)\geq f(1)$. Ainsi $f(1)$ la valeur minimale de f.

2)Soit a , b deux éléments de $[-2,1]$ tel que $a<b\Leftrightarrow f(a)\geq f(b)$ car f est décroissante sur $[-2,1]\Rightarrow -2f(a)\leq -2f(b)\Rightarrow g(a)\leq g(b)$ donc g est croissante sur $[-2,1]$

Soit a , b deux éléments de $[1,9]$ tel que $a<b\Leftrightarrow f(a)\leq f(b)$ car f est croissante sur $[1,9]\Rightarrow -2f(a)\geq -2f(b)\Rightarrow g(a)\geq g(b)$ donc g est décroissante sur $[1,9]$

D'où le tableau de variation de g :

x	-2		1		9
g(x)		↗		↘	

Exercice8 : 1) -1 est le minimum de f sur $[-3,4]$, f(2) est le minimum de f sur $[1,2]$;

2)a) f est continue sur $[1,4]$ et $f(1)f(4)=-5<0$ d'après théorème des valeurs intermédiaire f(x)=0 admet une unique solution α dans $[1,4]$;

b) si $x\in[-3,\alpha]$, $f(x)\le 0$, ζ_f est au dessus de l'axe des abscisses et si $x\in[\alpha,4]$, $f(x)\le 0$, ζ_f au dessous de l'axe des abs susses,

3/ $x\in[-3,4]$, $-1\le f(x)\le 5 \Rightarrow -2\le 2f(x)\le 10 \Rightarrow -10\le -2f(x)\le -2 \Rightarrow 1\le 11-2f(x)\le 9$

$\Rightarrow 11-2f(x)>0$ donc f est définie sur $[-3,4]$

Exercice N° 9:

1) a)Il faut que $-x^4+4x^2\ne 0 \Leftrightarrow x^2(-x^2+4)\ne 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2\ne 0\\ ou\\ -x^2+4\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0\\ ou\\ x\ne 2 \;\; ou \;\; x\ne -2\end{cases}$

$D_f = IR/\{-2\ ,0\ ,2\}$

b) Soit $x\in IR/\{-2\ ,0\ ,2\}$. Si $x\ne 0$ alors $-x\ne 0$, $x\ne -2$ *alors* $-x\ne 2$ $x\ne 2$ *alors* $x\ne -2$

$\Leftrightarrow -x\in D_f$; $f(-x)=\dfrac{(-x)^4-4(-x)^2+3}{-(-x)^4+4(-x)^2}=\dfrac{x^4-4x^2+3}{-x^4+4x^2}=f(x)$. Donc f est paire.

2) a) Soit $x\in IR/\{-2\ ,0\ ,2\}$.

$f(x)=\dfrac{x^4-4x^2}{-(x^4-4x^2)}+\dfrac{3}{-(x^2)^2+2\times 2x^2+4-4}=-1+\dfrac{3}{-((x^2)^2-2\times 2x^2+4)+4}=-1+\dfrac{3}{4-(x^2-2)^2}$

b) Si $x\in\left]0,\sqrt{2}\right[$ alors $x^2\in\left]0\ ,2\right[$,

$0<x^2<2 \Leftrightarrow -2<x^2-2<4 \Leftrightarrow 0<(x^2-2)^2<4 \Leftrightarrow -4<-(x^2-2)^2<0 \Leftrightarrow 0<4-(x^2-2)^2<4$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{4-(x^2-2)^2} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}<\dfrac{3}{4-(x^2-2)^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}<\dfrac{3}{4-(x^2-2)^2}-1$. Donc f est minorée par $-\dfrac{1}{4}$

c) On a $\forall x\in\left]\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right[$; $f(x)\ge 0$. Or $f(1)=0\Rightarrow$ o est un minimum de f sur $\left]\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right[$, il est atteint en 1.

Exercice N°10 : $f(x)=x^2-4x$

1) Voir courbe

2) a) Soit a et b deux réels de $[2;+\infty[$ tel que $a\le b$

$a\le b$ Signifie

que $f(b)-f(a)=b^2-4b-a^2+4a=b^2-a^2-4(b-a)$

$=(b-a)(b+a-4)$; a et $b\in[2;+\infty[$ donc $b+a-4>0$

et $b-a>0$ donc $f(b)-f(a)>0$ alors f est croissante

sur $[2;+\infty[$

b) f est croissante sur $[2;+\infty[$ donc $f(2)\le f(x)\le f(4)$ signifie

que $-4\le f(x)\le 0$ Donc si $x\in[2;4]$ alors $f(x)\in[-4;0]$.

c) $\alpha\in[0;\pi]$; $0\le\cos^2\alpha\le 1\Rightarrow 2\le 2+\cos^2\alpha\le 3\le 4\Rightarrow f(2+\cos^2\alpha)\le 0$ d'après la question 2)b)

3) f est une fonction polynôme donc continue en tout réel.

4) $h(x)=|x-4|-4$

a) $h(x)=\begin{cases}x-8 & \text{si } x\ge 4\\ -x & \text{si } x<4\end{cases}$ donc h est une fonction affine par intervalle.

b) Voir courbe.

c) $\dfrac{(x-2)^2}{|x-4|}\ge 1$ signifie que $\dfrac{x^2-4x+4}{|x-4|}\ge 1$ signifie que $x^2-4x+4\ge|x-4|$ signifie que $x^2-4x\ge|x-4|-4$ signifie que $f(x)\ge h(x)$ signifie que (C) est au dessus de(C') signifie que $S_{IR}=\left]-\infty,0\right]\cup\left[3,+\infty\right[$

Exercice N°11 : $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{2-|x|}$

1) a) $|x|\ne 2$ signifie que $x\ne 2$ et $x\ne -2$ donc $D_f=IR\setminus\{-2;2\}$

b) Soit $x\in IR\setminus\{-2;2\}$ signifie que $x\ne 2$ et $x\ne -2$ signifie que $-x\ne 2$ et $-x\ne -2$ donc $-x\in IR\setminus\{-2;2\}$

$f(-x)=\dfrac{2(-x)^2-1}{2-|-x|}=\dfrac{2x^2-1}{2-|x|}=f(x)$ donc f est paire.

2) a)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2+x-3$		+	0	−	0	+	

b) Sur $[0;1]$; $g(x)=\dfrac{2x^2-1}{2-x}$; $g(x)-1=\dfrac{2x^2-1-(2-x)}{2-x}=\dfrac{2x^2+x-3}{2-x}$; $\forall x\in[0;1]$ On a $2-x>0$ car $-1<-x<0$ et $2-x\le 2$ et $2x^2+x-3<0$ donc $g(x)-1<0$ ainsi g est majorée par 1 sur $[0;1]$

c) Soit $x\in[-1;0]$; on a $-x\in[0;1]$ d'après 2) a) : $g(-x)\le 1$ or f est paire

donc $g(-x)=g(x)\le 1\forall x\in[-1;0]$ par suite $\forall x\in[-1;1]; g(x)\le 1$; $g(1)=\dfrac{2}{2}=1$ donc 1 est un maximum de g sur $[-1;1]$.

3) $g(x)=\dfrac{2x^2-1}{2-x}; x\in[0;2]$

$g(x)-(-1)=g(x)+1=\dfrac{2x^2-1}{2-x}+\dfrac{2-x}{2-x}=\dfrac{2x^2-x+1}{2-x}$; $2x^2-x+1\ge 0\,\forall x\in[0;2[$ car $\Delta<0$ et $a=2>0$ et $2-x\ge 0\,\forall x\in[0;2]$ donc $g(x)-(-1)\ge 0\ \forall\ x\in[0;2[$.

Soit $x\in]-2;0]$ on a donc $-x\in[0;2[\Rightarrow g(-x)\ge -1$ or g est paire donc $g(x)=g(-x)$

$\Rightarrow g(x)\ge -1\,\forall x\in]-2;0]$ par suite $\forall x\in]-2;2[; g(x)\ge -1$.

Exercice N° 12: Pour tout $x\in IR$, On a $x^2+1>x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>|x|\ge x$ d'où $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}\le\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{1}{2}\le 0$. D'autre part $\sqrt{x^2+1}>|x|\ge -x \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}}\ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{2}\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{1}{2}\ge -1$ en fin on trouve $-1\le\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{1}{2}\le 0$ et par suite f est bornée sur IR.

Exercice N° 13 :

1) a) $x>0$, On a $-1\le\sin x\le 1 \Leftrightarrow 1\le 2+\sin x\le 3$, $x>0\Leftrightarrow\sqrt{x}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\le\frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}\le\frac{3}{\sqrt{x}}$

b) $x>1\Leftrightarrow\sqrt{x}>1\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}<1\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{x}}<3$ et par suite $0\le f(x)\le 3$ ainsi f est bornée sur $[1,+\infty[$

2) a) $x\ge -1 \Leftrightarrow -1\le\sin x\le 1\Leftrightarrow 2x-1\le 2x+\sin x\le 2x+1$,

$x>-1\Leftrightarrow x+1\rangle 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1}\le\frac{2x+\sin x}{x+1}\le\frac{2x+1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1}\le h(x)\le\frac{2x+1}{x+1}$

b) On a $\frac{2x+1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1}\le 2$ car $x+1>0$, ,

$\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2x}{x+1}-\frac{1}{x+1}$, $x>0\Leftrightarrow 2x>0\Leftrightarrow 2x-1>-1\Leftrightarrow\frac{2x-1}{x+1}>\frac{-1}{x+1}\ge -1$ Car

$x>0\Rightarrow x+1>1\Rightarrow\frac{1}{x+1}<1\Rightarrow\frac{-1}{x+1}>-1$ et par suite $-1\le h(x)\le 2$ signifie que h est bornée

Exercice N° 14: 1) $x\in IR \Rightarrow -x\in IR$, $f(-x)=\frac{-2x}{(-x)^2+3}=-\frac{2x}{x^2+3}=-f(x)$ Donc f est impaire.

2) $f(x)-\frac{2}{3}=\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2}{3}=\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2(x^2+3)}{3(x^2+3)}=\frac{6x-2x^2-6}{3(x^2+3)}=\frac{-2(x^2-3x+3)}{3(x^2+3)}$

$x^2-3x+3=0$, $\Delta=9-12=-3<0$ donc $x^2-3x+3\ge 0 \Rightarrow -2(x^2-3x+3)\le 0$

$\Leftrightarrow f(x)-\frac{2}{3}\le 0 \Leftrightarrow f(x)\le\frac{2}{3}$ (*). On a $\forall\ x\ge 0$, $\frac{2x}{x^2+3}\ge 0$ (**) et par suite $0\le f(x)\le\frac{2}{3}$.

3) Soit $x\in IR_-$ *alors* $-x\in IR_+$ D'après 2) On a $0\le f(-x)\le\frac{2}{3}$ puisque f est impaire alors

$f(-x)=-f(x)$ ce qui donne que : $0\le -f(x)\le\frac{2}{3}$ et par suite $-\frac{2}{3}\le f(x)\le 0$ enfin

$-\frac{2}{3}\le f(x)\le\frac{2}{3}$. *pour tout* $x\in\mathbb{R}$ on dit que f est bornée sur IR.

Exercice N° 15 :

$f(x)=\frac{-4x^2+16x-17}{x^2-4x+5}=\frac{-4(x^2-4x+4-4)-17}{x^2-4x+5}=\frac{-4(x-2)^2+16-17}{(x-2)^2+1}=\frac{-4(x-2)^2-1}{(x-2)^2+1}$

$=\frac{-4\left[(x-2)^2+1-1\right]-1}{(x-2)^2+1}=\frac{-4\left[(x-2)^2+1\right]+3}{(x-2)^2+1}=-4+\frac{3}{(x-2)^2+1}$. $f(x)$ est maximale équivaut

$\frac{3}{(x-2)^2+1}$ est maximale $\Leftrightarrow (x-2)^2+1$ est minimale

$\Leftrightarrow x-2=0$ car $(x-2)^2\ge 0\Leftrightarrow x=2$ donc $f(x)$ est maximale pour $x=2$.

Exercice N° 16 : 1) $x\in\left[\frac{1}{5},+\infty\right[\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{1}{x}\le 5$

* Si $0<\frac{1}{x}<1\Leftrightarrow x>1$ *Donc* $E\left(\frac{1}{x}\right)=0$

* Si $1\le\frac{1}{x}<2\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x\le 1$ *Donc* $E\left(\frac{1}{x}\right)=1$

* Si $2\le\frac{1}{x}<3\Leftrightarrow\frac{1}{3}<x\le\frac{1}{2}$ *Donc* $E\left(\frac{1}{x}\right)=2$

* Si $3\le\frac{1}{x}<4\Leftrightarrow\frac{1}{4}<x\le\frac{1}{3}$ *Donc* $E\left(\frac{1}{x}\right)=3$

* Si $4\le\frac{1}{x}<5\Leftrightarrow\frac{1}{5}<x\le\frac{1}{4}$ *Donc* $E\left(\frac{1}{x}\right)=4$

* Si $x=\frac{1}{5}\Leftrightarrow$ *Donc* $E\left(\frac{1}{x}\right)=5$

D'où : $f(x)=\begin{cases}0 & \forall x\in\left]1,+\infty\right[\\ x^2 & \forall x\in\left]\frac{1}{2},1\right]\\ 2x^2 & \forall x\in\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\\ 3x^2 & \forall x\in\left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]\\ 4x^2 & \forall x\in\left]\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right]\\ 5x^2 & si\ x=\frac{1}{5}\end{cases}$

Exercice N°17: 1) $h(x)=2x^2-3x+1=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{(-3)^2-4\times 2\times 1}{4\times 2^2}\right]=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]$

2) a) Soit a , b deux réels de $\left[\frac{3}{4},+\infty\right[$ *tel que* $a<b$ alors

$a-\frac{3}{4}<b-\frac{3}{4}\Leftrightarrow 2\left(a-\frac{3}{4}\right)^2<2\left(b-\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 2\left(a-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}<2\left(b-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\Leftrightarrow h(a)<h(b)$ ce qui

signifie que h est croissante sur $\left[\frac{3}{4},+\infty\right[$

Soit a , b deux réels de $\left]-\infty,\frac{3}{4}\right]$ *tel que* $a<b \Rightarrow a-\frac{3}{4}<b-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\left(a-\frac{3}{4}\right)^2>\left(b-\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow h(a)>h(b)$ et

par suite h est décroissante sur $\left]-\infty,\frac{3}{4}\right]$

b) h est croissante sur $\left[\frac{3}{4},+\infty\right[\Leftrightarrow h\left(\frac{3}{4}\right)\le h(x)$

h est décroissante sur $\left]-\infty,\frac{3}{4}\right] \Leftrightarrow h\left(\frac{3}{4}\right)\le h(x)$. Donc $h\left(\frac{3}{4}\right)$ est la valeur minimale de h.

3) a) $h\left[(x+2)^2+\frac{3}{4}\right]=2\left[(x+2)^2+\frac{3}{4}\right]^2-3\left[(x+2)^2+\frac{3}{4}\right]+1$

$=2\left[(x+2)^4+\frac{3}{2}(x+2)^2+\frac{9}{16}\right]-3(x+2)^2-\frac{9}{4}+1=2(x+2)^4+3(x+2)^2+\frac{9}{8}-3(x+2)^2-\frac{9}{4}+1$

$=2(x+2)^4+\frac{9}{8}-\frac{9}{4}+1=2(x+2)^4+\frac{17}{8}-\frac{18}{8}=2(x+2)^4-\frac{1}{8}=g(x)$

b) Soit $a<b<-2 \Rightarrow (a+2)<(b+2)<0$ Donc $(a+2)^2>(b+2)^2 \Leftrightarrow (a+2)^2+\frac{3}{4}>(b+2)^2+\frac{3}{4}$ Donc $h\left[(a+2)^2+\frac{3}{4}\right]>h\left[(b+2)^2+\frac{3}{4}\right] \Rightarrow g(a)>g(b)$ et par suite g décroissante sur $]-\infty,-2]$. soit

$-2<a<b \Leftrightarrow (a+2)^2+\frac{3}{4}<(b+2)^2+\frac{3}{4} \Leftrightarrow h\left[(a+2)^2+\frac{3}{4}\right]<h\left[(b+2)^2+\frac{3}{4}\right] \Rightarrow g(a)<g(b)$ et par suite g est croissante sur $[-2,+\infty[$

c) $x\in]-\infty,-2]$ *alors* $g(x)\geq g(-2)$ *car* g est décroissante

$x\in]-2,+\infty]$ *alors* $g(-2)\leq g(x)$ *car* g est croissante

Donc $g(-2)=-\frac{1}{8}$ est la valeur minimale de g sur IR.

Exercice N° 18: 1) $D_f=IR^*$.

2) Soit $x\in IR_+^*$, $f(2)=12$, $f(x)-f(2)=x^2+\frac{16}{x}-12=\frac{x^3-12x+16}{x}$.

Soit le polynôme $P(x)=x^3-12x+16$. 2 est une racine de P donc $P(x)$ est factorisable par $x-2$, $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$.

Par identification On a : $\begin{cases}a=1\\b-2a=0\\c-2b=-12\\-2c=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=2\\c=-8\end{cases}$ Alors $P(x)=(x-2)(x^2+2x-8)$ ainsi

$f(x)-f(2)=\frac{(x-2)(x^2+2x-8)}{x}=\frac{(x-2)^2(x+4)}{x}\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq f(2)\ \forall x\in IR_+^*$ et par suite $f(2)$ est la valeur minimale de f sur IR_+^*.

B) 1) $V=x^2h$

2) Les 4 faces sont des rectangles de longueur x et de hauteur h. L'aire des 4 faces est $4xh$, l'aire de base est x^2 enfin $A=x^2+4xh$ or $V=400l=4m^3$, $V=x^2h=4 \Leftrightarrow h=\frac{4}{x^2}$ ce qui donne

$A=x^2+\frac{16}{x}$.

3) D'après (A) l'aire est minimale lorsque $x=2$ et comme $h=\frac{4}{x^2} \Rightarrow h=1$.

Exercice 19 1) On prend $f(x)=3-\sqrt{x-2}$, on a : $f(3)=2$ et $f(2)=3$.

2) Supposons

que : $a-7=\sqrt{b+4}$ et $a-4=\sqrt{b+7} \Rightarrow (a-4)^2-(a-7)^2=(b+7)-(b+4) \Leftrightarrow 3(2a-11)=3$

Donc, c'est la seule valeur possible de a, or elle ne convient pas, puisqu'on aurait : $\sqrt{b+4}=a-7=-1$.
Ainsi 4 et 7 ne sont pas échangeables.

3) Soient deux entiers distincts, disons $n<m$.

Alors : $\begin{cases}a-n=\sqrt{b+m}\\a-m=\sqrt{b+n}\end{cases} \Leftrightarrow (i)\begin{cases}(a-n)^2=b+m\\(a-m)^2=b+n\end{cases}$ et $(ii)\begin{cases}a-n\geq 0\\a-m\geq 0\end{cases}$ ce qui revient à dire : $a\geq m$. On a

$(i)\Leftrightarrow\begin{cases}(a-n)^2=b+m\\(a-m)^2-(a-n)^2=b+n-(b+m)\end{cases}$; soit encore $\begin{cases}b=(a-n)^2-m\\(n-m)(2a-m-n)^2=n-m\end{cases}$; la deuxième équation donne : $a=\frac{m+n+1}{2}$. En n'oublie pas la condition (ii), on a donc démontrer que la fonction f échange n et m st et seulement si $\left\{a=\frac{m+n+1}{2}, b=(a-n)^2-m\right\}$. Observons que par ailleurs : $n+1\leq m$ puisqu'il s'agit d'entiers. D'où : $n+1=m$.

Conclusion : Deux entiers sont échangeables si et seulement si ces entiers sont consécutifs ; nos calculs montrent qu'alors une et seule fonction f réalise l'échange : $f(x)=n+1-\sqrt{x-m}$

Exercice N° 20 : $f(2,2)=f(1+1,1+1)=f(1,f(2,1))$, $f(2,1)=f(1+1,0+1)=f(1,f(2,0))$

$f(2,0)=f(2-1,1)=f(1,1)=f(0+1,0+1)=f(0,f(1,0))=f(1,0)+1=f(0,1)+1=1+1+1=3$

$\Rightarrow f(2,1)=f(1;f(2,0))=f(0+1,3)=f(0,f(1,2))=f(0+1,2)+1=f(f(1,1))+1$

$=f(0,3)+1=3+1+1=5$

$\Rightarrow f(2,2)=f(1,f(2,1))=f(1,5)=f(0,f(1,4))=f(1,4)+1=f(0,f(1,3))+1$

$=f(1,3)+1+1=f(0,f(1,2))+2=f(1,2)+1+2=f(0,f(1,1))+3=f(1,1)+1+3=3+4=7$

Enfin $f(2,2)=7$.

Exercice 21 : $\begin{cases}-x^2+f(x)+xf(-x)=0\\-x^2+f(-x)-xf(x)=0\end{cases} \Rightarrow -x^2+f(x)+xf(-x)-\left[-x^2+f(-x)-xf(x)\right]=0$

$\Leftrightarrow f(x)+xf(-x)-f(-x)+xf(x)=(1+x)f(x)-(1-x)f(-x)=0$,

pour $x=1$; $(1+1)f(1)=(1-1)f(-1) \Leftrightarrow f(1)=0$, et par suite pour

$x\neq 1$, $f(-x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)f(x)$, or $-x^2+f(x)+xf(-x)=0 \Leftrightarrow -x^2+f(x)+x\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)f(x)\right]=0$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2(1-x)}{1+x^2}$.

Ainsi $\begin{cases}f(1)=0\\f(x)=\frac{x^2(1-x)}{1+x^2} & pour\ x\neq 1\end{cases}$ et comme $\frac{1^2(1-1)}{1+1^2}=0$ enfin $f(x)=\frac{x^2(1-x)}{1+x^2}\quad \forall x\in IR$

Exercice N° 22 : $S_n\left(\left(x_i^2-x_i\right)^2\right)=S_n\left[\left(x_i^4-2x_i^3+x_i^2\right)\right]=S_n(S_4-2S_3+S_2)=0$ car $S_2=S_3=S_4$.

$S_n\left(\left(x_i^2-x_i\right)^2\right)=\left(x_1^2-x_1\right)^2+\left(x_2^2-x_2\right)^2+.......+\left(x_n^2-x_n\right)^2=0$. Comme $\forall i\in\{1;2;.....;n\}\ \left(x_i^2-x_i\right)^2\geq 0$ on déduit que $\forall i\in\{1;2;.....;n\}\ x_i^2-x_i=0 \Leftrightarrow x_i(x_i-1)=0 \Leftrightarrow x_i=0$ *ou* $x_i=1$.

Exercice N° 23: 1) $\forall x\in[0;1]$; $x(1-x)\geq 0$ et $\frac{1}{4}-x(1-x)=\frac{1}{4}(1-4x+4x^2)=\frac{1}{4}(1-2x)^2\geq 0$.

2) On pose $\alpha=a(1-b)$; $\beta=b(1-c)$ et $\varphi=c(1-a)$. $\alpha\beta\varphi=[a(1-b)][b(1-c)][(1-a)]$,

On a $0\le\alpha\beta\varphi\le\left(\frac{1}{4}\right)^3$ (*). Raisonnons par l'absurde, $\min(\alpha,\beta,\varphi)>\frac{1}{4}\Rightarrow\alpha>\frac{1}{4},\beta>\frac{1}{4},\varphi>\frac{1}{4}$

$\Rightarrow(\alpha\times\beta\times\varphi)^3>\left(\frac{1}{4}\right)^3$. Suivant (*)

on conclut que $\min(\alpha,\beta,\varphi)\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow\min[a(1-b),b(1-c),c(1-a)]\le\frac{1}{4}$.

Exercice N° 24: Soit (f,g) convenant

Si $x=y=1$, on a $[f(1)]^{g(1)}+[f(1)]^{g(1)}=1+1=2$, comme $f(1)\in IN^*$ et $g(1)\in IN^*$ alors $f(1)=g(1)=1$ (*).

Si $x=2$, $y=1$, on a $[f(2)]^{g(1)}+[f(1)]^{g(2)}=2+1=3$ or d'après (*) $f(1)=1$ et comme $g(2)\in IN^*$ et $f(2)=2$ avec $x\in IN^*$ et $y=1$ on a $[f(x)]^{g(1)}+[f(1)]^{g(x)}=x+1$ or $f(1)=1$ et $g(x)\in IN^*$ donc $f(x)=x$ avec $x=y\ge2$ on a $[f(x)]^{g(y)}+[f(y)]^{g(x)}=x+y$

$\Leftrightarrow x^{g(y)}+y^{g(x)}=x+y$ car $f(x)=x$ $\forall x\in IN^*$ et $f(y)=y$ $\forall y\in IN^*$ donc $g(x)=1$

Donc (f,g) sont des éléments de : $\begin{cases} f: IN^*\to IN^* & g: IN^*\to IN^* \\ x\mapsto x & x\mapsto 1\end{cases}$

Réciproquement, $x^1+y^1=x+y$.

Conclusion : $(f,g)=\begin{cases} f: IN^*\to IN^* & g: IN^*\to IN^* \\ x\mapsto x & x\mapsto 1\end{cases}$

Exercice25

1. a. $f(1)=f(1+0)=f(1)\times f(0)+f(1)+f(0)=2f(0)+1$ d'où $f(0)=0$.
   b. $f(2)=f(1+1)=f(1)^2+2f(1)=3$; $f(3)=f(2+1)=3\times1+3+1=7$; $f(6)=f(3+3)=7\times7+7+7=63$.
2. Pour tout entier naturel n, $f(n+1)=f(n)\times f(1)+f(n)+f(1)=2f(n)+1$
3. $g(n+m)=f(n+m)+1=f(n)\times f(m)+f(n)+f(m)+1$
   $g(n)\times g(m)=(f(n)+1)(f(m)+1)=f(n)\times f(m)+f(n)+f(m)+1$
4. Quel que soit l'entier naturel a, la fonction g qui à tout entier n associe a^n vérifie la relation $g(n+m)=g(n)\times g(m)$.

   La fonction f serait alors définie par $\boxed{f(n)=a^n-1}$.
   La condition $f(1)=1$ impose que $a=2$.

Exercice26

$f(1;0)=f(0;1)=2$
$f(2;0)=f(1;1)=f(0;f(1;0))=f(0;2)=3$
$f(1;2)=f(0;f(1;1))=f(0;3)=4$
$f(2;1)=f(1;f(2;0))=f(1;3)=f(0;f(1;2))=f(0;4)=5$
$f(1;4)=f(0;f(1;3))=f(0;5)=6$
$f(2;2)=f(1;f(2;1))=f(1;5)=f(0;f(1;4))=f(0;6)=7$.

Solutions

Exercice N° 1 : 1)a) ; 2) c) 3) c) ; 4)c)

Exercice N° 2 : a)Vrai :si f est continue sur $[0,1]$, $f(0).f(1)\langle0$,donc il existe un réel k $telque$ $f(k)=0$

b)Faux : f est strictement décroissante sur $[0,1]$ donc $f(x)\le f(0)=4$

si $\beta=5$ alors $f(x)=5$ n'admet pas de solution dans $[0,1]$

c)Faux : $f(1)\langle0$ et $f(0)\rangle0$ mais si f n'est pas continue alors $f(x)=0$ peut ne peut pas avoir des solutions

d) Faux :f est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ donc $f(x)=0$ admet un unique solution dans $[0,1]$ si f $(1)<0$

Exercice N° 3 : b) et d) , remarque $f(]1,9])=[-2,+\infty[$

Exercice N° 4 : 1)Vrai ; 2) Faux ; 3) vrai

Exercice N° 5 : Au point $x_0=a\in IR$ On a : $f(a)=a^2+5a+2008$

f est continue en a si et seulement si pour tout $\beta>0$,il existe $\alpha\rangle0$ tel que si $|x-a|<\alpha$ alors $|f(x)-f(a)|<\beta$.

Or : $|f(x)-f(a)|=|x^2+5x+2008-a^2-5a-2008|=|x^2-a^2+5(x-a)|=|(x-a)(x+a)+5(x-a)|$

$=|x-a||x+a+5|\le|x-a|(|x|+|a|+5)$

Le réel β étant donné, cherchons s'il existe α tel que $|x-a||x+a+5|<\beta$

Si $|x-a|<1$ $alors$ On a : $|x|=|x-a+a|\le|x-a|+|a|\le1+|a|$

et par suite : $|f(x)-f(a)|<|x-a|(1+2|a|+5)<|x-a|(6+2|a|)<\beta$ signifie $|x-a|<\frac{\beta}{6+2|a|}$

soit $\alpha=\min\left(1,\frac{\beta}{6+2|a|}\right)$ un nombre pour tout réel β donné, α existe donc f est continue en $x_0=a\in IR$

Exercice N° 6 : On a $f(0)=\frac{1}{3}$ Soit β un réel strictement positif tel que $\left|f(x)-\frac{1}{3}\right|<\beta$. Cherchons un réel strictement positif α tel que si $|x-0|<\alpha$ $alors$ $|f(x)-f(0)|\langle\beta$ (*)

$$\left|f(x)-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3}{3\sqrt{9-x^2}}-\frac{\sqrt{9-x^2}}{3\sqrt{9-x^2}}\right|=\left|\frac{9-(9-x^2)}{(3\sqrt{9-x^2})(3+\sqrt{9-x^2})}\right|=\frac{|x^2|}{\left|3\sqrt{9-x^2}(3+\sqrt{9-x^2})\right|}$$

Il est clair que $3\sqrt{9-x^2}(3+\sqrt{9-x^2})>9-x^2$ Alors $\frac{1}{\left|3\sqrt{9-x^2}(3+\sqrt{9-x^2})\right|}<\frac{1}{9-x^2}$

signifie que $\frac{x^2}{\left|3\sqrt{9-x^2}(3+\sqrt{9-x^2})\right|}<\left|\frac{x^2}{9-x^2}\right|=\left|\frac{x}{9-x^2}\right||x|$

si $|x|<1 \Rightarrow -1<x<1$ *et* $]-1;1[\subset]-3;3[$ $0<x^2<1$ *alors* $-1<-x^2<0$ Signifie $8<9-x^2<9$. signifie $\frac{1}{9}<\frac{1}{9-x^2}<\frac{1}{8}$. Pour que x satisfait (*) il suffit donc de choisir $|x|<1$ *et* $\frac{1}{8}|x|<\beta$

Donc soit $\alpha=\inf(1, 8\beta)$. Enfin pour tout β donné, il existe un réel $\alpha=\inf(1, 8\beta)$ tel que si $|x-0|\langle\alpha \Rightarrow |f(x)-f(0)|\langle\beta$ et par suite f est continue en 0.

Exercice N°7 1) faux, 2) faux, f(2)=4, 3) faux, 4) faux, 5) faux ,6)vrai

Exercice N°8 : $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1) Il faut que $x\neq 0$ et $4-x^2\geq 0$; $4-x^2=0$ signifie que : $x=2$ ou $x=-2$ donc $D_f=[-2;2]\setminus\{0\}$.

2) On a $x\to 4-x^2$ continue sur $[1;2]$ et $4-x^2\geq 0$ donc $x\to\sqrt{4-x^2}$ est continue sur $[1;2]$ aussi $x\to\frac{1}{x}$ est continue sur $[1;2]$ et par suite $x\to\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ est continue sur $[1;2]$

3) $f(x)=x$; Soit $h(x)=f(x)-x$, soit l'équation $h(x)=0$; $h(1)=f(1)-1=\sqrt{3}-1$, $h(2)=0$

On a $h(1).h(2)\leq 0$ donc l'équation $h(x)=0$ admet une seule solution $\alpha\in[1;2]$ signifie que $f(x)=x$ admet une solution $\alpha\in[1;2]$. Encadrement de α : $h(1)=\sqrt{3}-1>0$, $h(1.1)=\frac{\sqrt{4-1.1^2}}{1.1}-1,1>0$

, $h(1.2)=\frac{\sqrt{4-1.2^2}}{1.2}-1,2<0$, $\alpha\in[1.1 ;1.2]$

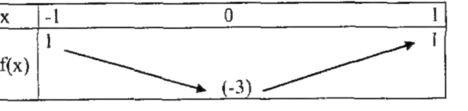
Exercice n°9 :

1) a) La courbe de f représente une coupure au point d'abscisse 1, donc f est discontinue en 1.

b)f est décroissante sur [-2 ; 0] donc

f ([-2 ; 0]) = [f (0) ; f (-2)] = [-3 ; 1].

$f([-1;2])=f([-1;1])\cup f([1;2])=[-3;-2]\cup[1;2[$



2) a)

b) La courbe de f ne représente pas de coupure au point d'abscisse 1, donc f est continue en 1.

3) a) f(x) = 1 ⇔ x = −2 ou x = 2

b) $f(x)\geq 1 \Leftrightarrow x\in]-\infty;1]\cup]1;2]$

c) La courbe g est l'image de celle de h par la translation de vecteur $(-\vec{i}-2\vec{j})$

Exercice n°10 :1) a- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $(-x)\in\mathbb{R}$ et f(-x) = f(x), donc f est paire.

b) Soient a et b deux réels de [0 ;1] tel que a<b.

x	-1	0	1
f(x)	1 ↘	(-3)	↗ 1

$0\leq a<b \Rightarrow \begin{cases} a^6<b^6 \\ 3a^2<3b^2 \end{cases} \Rightarrow a^6+3a^2<b^6+3b^2 \Rightarrow a^6+3a^2-<b^6+3b^2-3 \Rightarrow f(a)<f(b)$ donc f est strictement croissante sur[0 ;1].

c)f est une fonction polynôme donc elle est continue sur, donc sur [1 ;1]. D'autre part f est paire et strictement croissante sur [0 ;1] donc elle est strictement décroissante sur [-1 ;0] et par suite f(0) = -3 est le minimum de f sur [-1 ;1]. D'autre part f(-1) = 1 est le maximum de f sur [-1 ;0] car f est strictement décroissante sur [-1 ;0] et f(1) = 1 est le maximum de f sur [0 ;1] car f est strictement croissante sur [0 ;1]. Ainsi 1 est le maximum de f sur [-1 ;1].

Conclusion : $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [-1;1] \\ -3 \text{ est le minimm de f sur}[-1;1] \Rightarrow f([-1;1])=[-3;1] \\ 1 \text{ est le maximum sur}[-1;1] \end{cases}$

2) * f est continue et strictement décroissante sur [-1 ;0] et f(-1) = 1 et f(0) = -3donc $f(-1)\times f(0)<0$ et par suite il existe un unique réel $\alpha\in]-1;0[$ tel que f(α) = 0.

* f est continue et strictement croissante sur [0 ; 1] et f(1) = 1 et f(0) = -3donc $f(1)\times f(0)<0$ et par suite il existe un unique réel $\beta\in]-1;0[$ tel que f(β) = 0. Ainsi l'équation f(x) = 0 admet exactement deux solutions sur [-1 ; 1]. Donc la réponse correcte est C.

Exercice n°11 : 1) f est un rationnelle don f est continue sur D_f or $D_f=\{x\in\mathbb{R}$ tel que:$2x^2+x+1\neq 0\}=\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Soit $x\in\mathbb{R}$. $f(x)-(-1)=\frac{-5x+1}{2x^2+x+1}+1=\frac{2x^2-4x+2}{2x^2+x+1}=\frac{2(x-1)^2}{2x^2+x+1}$ or pour tout réel x, $2(x-1)^2\geq 0$ et $2x^2+x+1>0 \Rightarrow f(x)+1\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)\geq -1, \forall x\in\mathbb{R}$ donc f est minorée par -1.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $f(x)-4=\frac{-5x+1}{2x^2+x+1}-4=\frac{-(8x^2+9x+3)}{2x^2+x+1}$ $\Delta=-15<0$ donc $f(x)-4\leq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)\leq 4, \forall x\in\mathbb{R}$ donc f est majorée par 4.

b) on a $\left.\begin{matrix} f(x)\geq -1, \forall x\in\mathbb{R} \\ \text{et } f(1)=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ -1 est un minimum de f.

Existe-il un réel x tel que : $f(x)=4 \Leftrightarrow -5x+1=8x^2+4x+4 \Leftrightarrow 8x^2+9x+3=0$ et comme $\Delta=-15<0$ alors 4 n'a pas d'antécédent par f donc 4 n'est pad un maximum pour f.

3) a) $f(-2)=\frac{-9}{7}$; $f(-1)=\frac{7}{2}$; f est continue sur $[-2;-1]$ et $2\in\left]\frac{-9}{7};\frac{7}{2}\right[\Rightarrow$ l'équation f(x) = 2 admet au moins une solution $\alpha\in[-2;-1]$

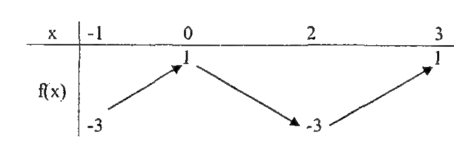
b) $f(\alpha)=2 \Leftrightarrow -5\alpha+1=4\alpha^2+2\alpha+2 \Leftrightarrow -7\alpha-1=4\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2=\frac{-7}{4}\alpha-\frac{1}{4}$

Exercice n°12 : 1)la courbe de f ne représente pas de repture *sur* $[-3,1]$ *d'où f est* continue sur $[-3,1]$

2)

3) f([0 ; 2]) = [-3 ; 1], f(]-3 ;1[) =]-3 ;1]

4) on pose g(x) = f(x) – x pour $x \in [0;1]$



La fonction $x \mapsto x$ est continue sur ℝ comme une fonction polynôme donc elle est continue sur $[0;1]$ et comme f est continue sur $[0;1]$ alors g est continue sur $[0;1]$. g(0) = 1 , g(1) = -2 et $0 \in [-2,1]$ donc l'équation g(x) = 0 admet au moins une solution $\alpha \in [0;1]$ c'est à dire l'équation f(x) = x admet au moins une solution $\alpha \in [0;1]$

Exercice N° 13 : Pour tout $x \in IR / \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ *on a,* $-1 \le \sin\left(\frac{1}{3x+1}\right) \le 1$, Si $x \rangle -\frac{1}{3}$ *alors* $3x+1 \rangle 0$

Signifie que : $-(3x+1) \le (3x+1)\sin\left(\frac{1}{3x+1}\right) \le 3x+1$.

S'il existe $\alpha \rangle 0$ *tel que* : $0 \langle x+\frac{1}{3} \langle \alpha$, $\left|f(x)-f\left(-\frac{1}{3}\right)\right| = \left|(3x+1)\sin\left(\frac{1}{3x+1}\right)\right| \le |3x+1|$

Si x s'approche de plus en plus vers $-\frac{1}{3}$ c'est-à-dire il existe un réel $\beta \rangle 0$ aussi petit que l'on veut tel que $|3x+1| \langle \beta$ *signifie* $\left|f(x)-f\left(-\frac{1}{3}\right)\right| \langle \beta$ et par suite f est continue en $\left(-\frac{1}{3}\right)^+$

Si $x \langle -\frac{1}{3}$ *on a* : $3x+1 \langle 0$ et par suite $(3x+1) \langle f(x) \le -(3x+1)$.

Soit $\alpha \rangle 0$ *tel que* : $-\alpha \langle x-\frac{1}{3}$. Alors $\left|f(x)-f\left(-\frac{1}{3}\right)\right| \le |-(3x+1)| \le |3x+1|$

Lorsque $-\alpha \langle x-\frac{1}{3}$ alors il existe un réel $\beta \rangle 0$ tel que $|3x+1| \langle \beta$

signifie $\left|f(x)-f\left(-\frac{1}{3}\right)\right| \langle \beta$ et par suite f est continue en $\left(-\frac{1}{3}\right)^-$.

Enfin f est continue en $-\frac{1}{3}$ vue qu'elle est continue a droite et a gauche en $-\frac{1}{3}$.

Exercice N° 14 : 1)soit $\alpha > 0$ tel que $x < \alpha$ alors $g(x) < \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha$ donc il existe $\beta > 0$ tel que $|g(x)-g(0)| < \beta$ donc g est continue en 0 .

2) $f(x) = \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{\sqrt{x}(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$, $x \rangle 0$

On a $x \rangle 0$ signifie $\sqrt{x+2}+\sqrt{2} \rangle 2\sqrt{2}$ d'où $\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} \langle \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow f(x) \langle \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{x}$

$x \in IR_+$ et par suite $|f(x)| \le g(x), \forall x \rangle 0$ Puisque g est continue en 0 alors il existe deux réels $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *telque* : *si* $|x-0| < \alpha$ *alors* $|g(x)| < \beta$ ce qui donne que $|f(x)| < \beta$ et par conséquent f est continue en 0 .

Exercice N°15 : soit la fonction $g(x) = f(x) - x$; g continue sur [1 , 2] .

g (1) = f(1) – 1 ≥ 0 (car f ([1 , 2]) = [1 , 2] donc f(1) ≥ 1) .

g(2) = f(2) – 2 ≤ 0(car f ([1 , 2]) = [1 , 2] donc f(2) ≤ 2) .Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un réel c ∈ [1 , 2] tel que g(c) = 0 équivaut f(c) = c

Exercice N° 16: f est continue en 0 si et seulement si pour tout $\beta > 0$ il existe $\alpha > 0$ *tel que* : pout tout $x \in IR$ si on ait : $|x| < \alpha$ *alors* $|f(x)| < \beta$. On a $|f(x)| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$ *car* : $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$. Il suffit de choisir $\alpha = \beta$.

Exercice N° 17 : 1) f est une fonction polynôme donc continue sur IR .

2) $f(-1) = -3$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$; $f(0) = -1$; $f(1) = 1$.

3) On a $f(-1) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) \langle 0$ *alors* l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) \times f(0) \langle 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

$f(0) \times f(1) \langle 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $]0;1[$.

Et par suite l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle $]-1;1[$.

Exercice N° 18: 1) $f(-1) = -4$; $f(0) = 0$. *On a* : $-4 \le -2 \le 0$. Alors l'équation $f(x) = -2$ admet au moins une solution dans $[-1; 0]$.

2) Soit la fonction $h(x) = f(x) + 2$. $h(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-1 ; 0]$.

$h(-1) = -2$; $h(-0.9) = -1.42$. *Donc* $\alpha \notin [-1; -0.9]$, $h(-0.8) = -0.962$ *Donc* $\alpha \notin [-0.9 ; -0.8]$

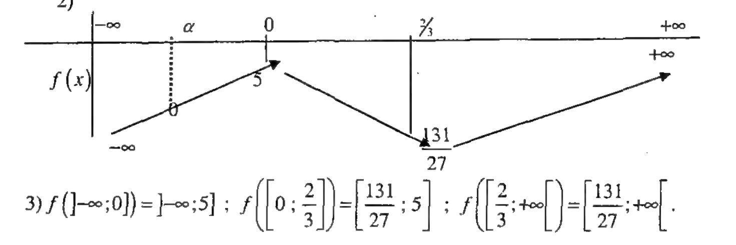
$h(-0.7) = -0.443$ *Donc* $\alpha \notin [-0.8 ; -0.7]$, $h(-0.6) = -0.12$ *Donc* $\alpha \notin [-0.7 ; -0.6]$

$h(-0.5) = 0.375$ *On a* $h(-0.5) \times h(-0.6) \langle 0$. *Donc* $\alpha \in [-0.6 ; -0.5]$

La valeur approchée par défaut de α à 10^{-1} prés est –0.6 .

Exercice N° 19 : 1) f est une fonction polynôme donc continue sur IR .

2)



3) $f(]-\infty;0]) =]-\infty;5]$; $f\left(\left[0;\frac{2}{3}\right]\right) = \left[\frac{131}{27};5\right]$; $f\left(\left[\frac{2}{3};+\infty\right[\right) = \left[\frac{131}{27};+\infty\right[$.

4)D'après le tableau de variations, la courbe de f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$ de $-\infty$ vers 5 cela signifie que la courbe de f coupe une seule fois l'axe des abscisses.

Sur les intervalles $\left[0\,;\frac{2}{3}\right]$ *et* $\left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$ la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses. *Et par suite* l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution sur IR.

5)Soit α la solution de $f(x)=0$.

*Sur $]-\infty;\alpha]$ $f(x)\le 0$ *Sur $[\alpha\,;0]$ $0\le f(x)\le 5 \Rightarrow f(x)\ge 0$

*Sur $\left[0\,;\frac{2}{3}\right]$ $\frac{131}{27}\le f(x)\le 5\Rightarrow f(x)\ge 0$ *Sur $\left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$ $f(x)\ge\frac{131}{27}\Rightarrow f(x)\ge 0$

Exercice N° 20 :1) Il faut que : $\begin{cases}\sqrt{x-3}+2\ne 0\\ x-3\ge 0\Leftrightarrow x\ge 3\end{cases}$ donc $D_f=[3\,;+\infty[$.

2)On a : $x-3\ge 0$ est continue sur $[3\,;+\infty[$ donc $x\to\sqrt{x-3}-2$ est continue sur $[3\,;+\infty[$, $x\to\sqrt{x-3}+2$ est continue sur $[3\,;+\infty[$ et $\sqrt{x-3}+2\ne 0$ alors $x\to\frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x-3}+2}$ est continue sur $[3\,;+\infty[$.

3) $f(3)=-1$, $f(x)-f(3)=\frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x-3}+2}+1=\frac{\sqrt{x-3}-2+\sqrt{x-3}+2}{\sqrt{x-3}+2}=\frac{2\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+2}\ge 0$.

donc $f(3)=-1$ est un minimum pour f.

4)On a $-2+\sqrt{x-3}\le 2+\sqrt{x-3}$, donc $\frac{-2+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+2}\le\frac{\sqrt{x-3}+2}{\sqrt{x-3}+2}=1$ et par suite f est majorée par 1.

5) $f(x)=3-x\Leftrightarrow f(x)+x-3=0$ On pose $h(x)=f(x)+x-3$, $h(3)=-1$; $h(4)=\frac{2}{3}$.

On a : $\left.\begin{array}{l}h(3)\times h(4)<0\\ h \text{ est continue sur }]3\,;4[\end{array}\right\}$ Alors $h(x)=0$ admet une solution dans $]3\,;4[$ $\Leftrightarrow f(x)=3-x$ admet une solution dans $]3\,;4[$.

Exercice N° 21 :1)On a $f(0)=0$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=4$. Puisque $f(0)<1<f\left(\frac{1}{2}\right)$

Alors l'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution $\alpha\in\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

2)a) g est une fonction polynôme donc continue sur IR.

b) On a : $8\alpha^3+6\alpha=1\Leftrightarrow 8\alpha^4+6\alpha^2=\alpha\Leftrightarrow\alpha^4=\frac{\alpha-6\alpha^2}{8}$; $g(\alpha)=2\alpha^4+3\alpha^2-\alpha-1$

$=2\left(\frac{\alpha-6\alpha^2}{8}\right)+3\alpha^2-\alpha-1=\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2}\alpha^2+3\alpha^2-\alpha-1=-\frac{3}{4}\alpha+\frac{3}{2}\alpha^2-1=\frac{3}{2}\alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)-1$

3) $0\le\alpha\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le\alpha-\frac{1}{2}\le 0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\alpha\le\alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\le 0\Leftrightarrow-\frac{1}{4}\le\alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\le 0$

$\Leftrightarrow-\frac{3}{8}\le\frac{3}{2}\alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\le 0\Leftrightarrow-\frac{3}{8}-1\le\frac{3}{2}\alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)-1\le-1\quad\Leftrightarrow-\frac{11}{8}\le g(\alpha)\le-1$

Exercice n°22: 1) Pour tout $x\in[0;1[$; $E(x)=0\Rightarrow f(x)=\sqrt{x}$ et pour tout $x\in[1;2[$; $E(x)=1\Rightarrow f(x)=\sqrt{x-1}$. 2) voir figure.

3) a)La courbe de f présente un saut au point d'abscisse 1, donc f est discontinue en 1 et non continue sur [0,2[.

b) • f coïncide avec la fonction rationnelle : $u: x\mapsto\frac{2x}{x-1}$ sur $]-\infty;0[$ et comme u est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, donc f est continue sur $]-\infty;0[$.

• f coïncide avec la fonction polynôme : $v: x\mapsto 1-\frac{1}{2}(x-1)^2$ sur $[2;+\infty[$ et comme v est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, d'où f est continue sur $[2;+\infty[$.

Exercice N°23 :

1) $D_1=]-\infty,0]$, $D_2=]0\,,1[$, $D_3=\{x\in[1,+\infty[\ \textit{tel que}\ x-1\ge 0\}=[1,+\infty[$,

$D_f=D_1\cup D_2\cup D_3=]-\infty,0]\cup]0,1[\cup[1,+\infty[=IR$

2) Voir figure

3- Sur $]-\infty,0]$, $f(x)=-x$, f est continue sur $]-\infty;0[$ et f est continue à gauche en 0 alors f est continue sur $]-\infty;0]$.

Sur $]0,1[$: le tracé est continue, donc f est continue sur $]0,1[$.

Sur $[1,+\infty[$: f est continue sur $]1,+\infty[$; f est continue à droite en 1 et par suite f est continue sur $[1,+\infty[$

4)La courbe de f présente une rupture au niveau du point $A(1,1)$, ce qui implique que f n'est pas continue en 1 et par suite f n'est pas continue sur IR.

Exercice N° 24:1) a) Pour $x=0$ on a $f(0)=\frac{3}{4}$ alors

$\forall\ x\in\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$, $f(x)=\frac{\sqrt{4+3x}-2}{x}=\frac{\left(\sqrt{4+3x}+2\right)\left(\sqrt{4+3x}-2\right)}{\left(\sqrt{4+3x}+2\right)x}=\frac{3}{\sqrt{4+3x}+2}$

b) $x\mapsto 4+3x$ est continue et positive sur $\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$ donc la fonction $x\mapsto\sqrt{4+3x}$ est continue sur $\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$; $x\mapsto 2$ est continue sur $\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$ donc la fonction

$x \mapsto \sqrt{4+3x}+2$ est continue sur $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$ et $\sqrt{4+3x}+2 \neq 0 \ \forall\ x \in \left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$ alors $x \mapsto \frac{3}{\sqrt{4+3x}+2}$ est continue sur $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$.

2) a) $f\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{2}$, On a $\sqrt{4+3x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{4+3x}+2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{3}{2}$ et par suite $f\left(-\frac{4}{3}\right)$ est un maximum de f sur $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$.

b) On a $\forall\ x \in \left[-\frac{4}{3},+\infty\right[\ 0 \leq f(x)$ *et* $f(x) \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$ signifie que f est bornée sur $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$.

3) $f(x)=x-1$. Soit la fonction $g(x)=f(x)-x+1$, g est continue sur $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$.

$f(x)=x-1 \Leftrightarrow g(x)=0$. $g(1)=\frac{3}{\sqrt{7}+2}>0$, $g(2)=\frac{3}{\sqrt{10}+2}-1<0$

On a $g(2)<0<g(1)$. Donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution dans l'intervalle $[1;2]$ et par suite l'équation $f(x)=x-1$ admet une solution dans l'intervalle $[1;2]$.

4) a) Soit a et b deux réels de $\left[-\frac{4}{3},+\infty\right[$ tel que $a \leq b$. On a $-\frac{4}{3} \leq a \leq b \Leftrightarrow -4 \leq 3a \leq 3b$

$\Leftrightarrow 0 \leq 4+3a \leq 4+3b \Leftrightarrow \sqrt{4+3a} \leq \sqrt{4+3b} \Leftrightarrow \sqrt{4+3a}+2 \leq \sqrt{4+3b}+2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{4+3a}+2} \geq \frac{3}{\sqrt{4+3b}+2}$ signifie $f(a) \geq f(b)$ et par suite f est décroissante sur $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$

b) Soit $x \in [0;1]$. On a $[0;1] \subset \left[-\frac{4}{3},+\infty\right[$ comme f est décroissante sur $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$,

$f(0) \geq f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \in [f(1), f(0)] \Leftrightarrow f(x) \in \left[\frac{3}{\sqrt{7}+2}, \frac{3}{4}\right]$ ce ci implique que

$f([0,1]) \subset \left[\frac{3}{\sqrt{7}+2}, \frac{3}{4}\right]$ D'autre part On a : $\frac{3}{\sqrt{7}+2} \in f([0,1])$; $\frac{3}{4} \in f([0,1])$, comme f est continue sur $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$, donc f est continue sur $[0,1]$ et par suite $f([0,1])$ est un intervalle d'où $\left[\frac{3}{\sqrt{7}+2}, \frac{3}{4}\right] \subset f([0;1])$ (II).

(I) *et* (II) donnent que $f([0,1])=\left[\frac{3}{\sqrt{7}+2}, \frac{3}{4}\right]$

Exercice 25:1) $D_f=\{x \in]-\infty,0]\ tel\ que\ x^2+4x+4 \geq 0\}$. ; $x^2+4x+4=(x+2)^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ en particulier $x^2+4x+4 \geq 0$ *pour tout* $x \in]-\infty,0]$. *Donc* : $D_1=]-\infty,0]$, $D_2=]0,2]$

ainsi $D_f=D_1 \cup D_2=]-\infty,0] \cup]0,2]=]-\infty,2]$.

2- Pour $x \in]-\infty,0]$ *on a* : $f(x)=2x+\sqrt{x^2+4x+4}=2x+\sqrt{(x+2)^2}=2x+|x+2|$

Si $x \in]-\infty,-2]$ *alors on a* : $f(x)=2x-x-2=x-2$

Si $x \in]0,2]$ *on a* : *si* $x \in]0,1[$, $f(x)=x+2$, *si* $x \in [1,2[$ $f(x)=x+3$ *et si* $x=2$: $f(x)=x+4$

En fin on trouve : $f(x)=\begin{cases} x-2 & si\ x \in]-\infty,-2] \\ 3x+2 & si\ x \in [-2,0] \\ x+2 & si\ x \in]0,1[\\ x+3 & si\ x \in [1,2[\\ x+4 & si\ x=2 \end{cases}$

f est une fonction affine par intervalle

3)a) Voir figure .

b) Continuité en 0 :

f est continue à droite et à gauche en 0 donc f est continue en 0

Continuité en 1 :

la courbe de f présente une rupture au point $A(1,4)$ donc f n'est pas continue en 1.

Exercice N° 26 :1) a) le maximum est 0.5 en 1 et le minimum est (-0.5) en (-1)

b) $f([0;+\infty[)=\left[0;\frac{1}{2}\right]$; c) $D_g=\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) $\begin{cases} h(x)=-|x+1|-2 & si\ x \in]-\infty;0[\\ h(x)=2x-1 & si\ x \in [0;+\infty[\end{cases}$

a) $|x+1|=\begin{cases} x+1 & si\ x \in [-1;+\infty[\\ -x-1 & si\ x \in]-\infty;-1] \end{cases}$ donc $h(x)=\begin{cases} -x-2 & si\ x \in [-1;0[\\ x-1 & si\ x \in]-\infty;-1] \\ 2x-1 & si\ x \in [0;+\infty[\end{cases}$ d'où h est une fonction affinie par intervalle.

3) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. a) $f(x)=2x-1$ signifie que $\frac{x}{x^2+1}=2x-1$ signifie que $x=(2x-1)(x^2+1)=2x^3+2x-x^2-1$ signifie que $2x^3-x^2+x-1=0$.

b) Soit $h(x)=f(x)-(2x-1)$; h est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\left]\frac{1}{2};1\right[$;

$h\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-1=-\frac{1}{2}$; $h(1)=2$; on a $h\left(\frac{1}{2}\right) \times h(1)<0$ donc l'équation $h(x)=0$ admet une solution $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$. Donc $f(x)=2x-1$ admet une solution $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$

Exercice N° 27: On pose $h=f^2+g^2$ alors h est continues sur IR et $\forall x \in IR$; $h(x)>0$ car f et g ne sont pas nulles à la fois. Considérons $u=\frac{f}{h}$ *et* $v=\frac{g}{h}$ sont deux fonctions continues sur IR comme quotient Donc $uf+vg=1$.

Solutions

Exercice n°1 : 1) c) ; 2) b) ;3) b) 4) b) ; 5) a)

Exercice N° 2 : 1) c) ; 2) a) ; 3) b)et c) ; 4) c)

Exercice N°3 : 1) a) $D_f = IR$; $D_C = IR \setminus \{1\}$; b) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -1$. 2) a) FIGURE

b) g est continue en 1 car la courbe de g ne présente pas de rupture au point d'abscisse 1.

3) $f([-1;2]) = \left]-1;-\frac{1}{2}\right] \cup \left[1,\frac{3}{2}\right]$; $g([-3;5]) = [0;3]$

ExerciceN°4 : 1) $\dfrac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{-3x+1}}{x+4} = \dfrac{x^2+3x-4}{(x+4)\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{-3x+1}\right)}$

$= \dfrac{(x+4)(x-1)}{(x+4)\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{-3x+1}\right)} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{-3x+1}}$

$\lim\limits_{x\to-4} f(x) = \lim\limits_{x\to-4} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{-3x+1}} = -\dfrac{5}{\sqrt{13}+\sqrt{13}} = -\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$

f est continue en -4 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to-4} f(x) = f(-4)$; si $a = -\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$ alors f est continue en -4

si $a \neq -\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$ alors f est discontinue en -4

2) a) f est continue en 1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1)$. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2-1} = \dfrac{x-2}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. f est continue en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

b) f est continue en -1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1)$; $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x-2}{x+1}$

Si $x > -1$ *alors* $x+1>0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$,Si $x<-1$ *alors* $x+1<0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$

Donc f est discontinue en -1.

Exercice N° 5: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3x^2-2x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} 3\left(x+\frac{1}{3}\right) = 4$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{-x^2-2x+3}{1-x} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}(x+3) = 4$

f est continue en 1 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1)$ et par suite $\alpha = 4$

Exercice N°6: 1) $x \to \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ est bien définie sur $]2;+\infty[$; $x \to \dfrac{2x^2-5x+3}{4(x-1)}$;

$x \neq 1$ d'où $D_f =]2;+\infty[\cup]-\infty;2] \setminus \{1\} = IR \setminus \{1\}$

2) $x \in]2;+\infty[$ on a $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \dfrac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} \dfrac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}$

3) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \dfrac{1}{4} = f(2)$ d'où f est continue à droite en 2 ; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{2x^2-5x+3}{4(x-1)} = \dfrac{1}{4} = f(2)$ d'où f est continue à gauche en 2 et par suite f est continue en 2.

4) On a $\sqrt{x+2}+2>2$ signifie que $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} < \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} > 0$ d'où $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} < \dfrac{1}{2}$ signifie

$0 < f(x) < \dfrac{1}{2} \forall x \in]2,+\infty]$

5) sur $]-\infty;2]$ on a $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+3}{4(x-1)}$; $2x^2-5x+3 = 2(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ d'où $f(x) = \dfrac{2x-3}{4}$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow$ la fonction $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]-\infty;2] \\ -\dfrac{1}{4} & \text{si } x = 1 \end{cases}$ est un prolongement par continuité de f en 1.

Exercice N° 7: a) Si $x \in [-1;+\infty[$, $f(-1)=0$, $x \to x+1$ est continue et positive sur $[-1;+\infty[$ alors $x \to \sqrt{x+1}$ est continue et positive sur $[-1;+\infty[$

si $x \in]-\infty;-1[$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^3+x^2}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^2(x+1)}{x+1} = 1 \neq f(-1)$

on a $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ donc f est discontinue en 1. signifie $D_c =]-\infty,-1[\cup]-1;+\infty[= IR/\{-1\}$

b) On a $x \to x^2-1$ continue et positive sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ alors $x \to \sqrt{x^2-1}$ est continue sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ .Etudions la continuité à droite de -1 et à gauche en 1.

$g(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x^3} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(x^2+x+1)} = \dfrac{1+x}{1+x+x^2}$

$\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1+x}{1+x+x^2} = 0 = g(-1)$ Donc g est continue à droite en -1.

$\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1+x}{1+x+x^2} = \dfrac{2}{3} \neq g(1)$ Donc g n pas est continue à gauche en 1

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = 0 \neq \lim\limits_{x\to1^-} g(x)$ Donc g est discontinue en 1 et par suite

$D_{cg} =]-\infty;-1] \cup [-1;1[\cup]1;+\infty[=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[= IR/\{1\}$

Exercice N° 8 : 1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$

a) $x+1 \neq 0$ et $x+2 \geq 0$ signifie que $x \neq -1$ et $x \geq 2$ donc $D_f = [-2;-1[\cup]-1;+\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+1}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}+1} = \dfrac{1}{2}$

$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = -1 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en -1.

2) $\begin{cases} g(x)=\dfrac{|x+3|-1}{x^2+x-2} & \text{si } x<-2 \\ g(x)=f(x) & \text{si } -2\le x<-1 \\ g(x)=x^2+mx & \text{si } x\ge -1 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to-3} g(x)=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{|x+3|-1}{x^2+x-1}=-\dfrac{1}{5}$; $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} g(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} f(x)=\dfrac{\sqrt{-\frac{3}{2}+2}-1}{-\frac{3}{2}+1}=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}}-1}{-\frac{1}{2}}=2-\sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{|x+3|-1}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x+2}{(x+2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)\ne\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ Donc f est discontinue en -2

c) $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} x^2+mx=1-m$ g est continue en -1 signifie que $1-m=\dfrac{1}{2}$ signifie $m=\dfrac{1}{2}$. d) Pour $m=\dfrac{1}{2}$; $D_{c_g}=IR\setminus\{-2\}$

Exercice N°9 :

1) $Df=IR-\{1\}$ $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{2x^2+2}}{x-1}=\dfrac{\left(2-\sqrt{2x^2+2}\right)\left(2+\sqrt{2x^2+2}\right)}{(x-1)\left(2+\sqrt{2x^2+2}\right)}=\dfrac{4-2x^2-2}{(x-1)\left(2+\sqrt{2x^2+2}\right)}$

$=\dfrac{2-2x^2}{(x-1)\left(2+\sqrt{2x^2+2}\right)}=\dfrac{2(1-x)(1+x)}{(x-1)\left(2+\sqrt{2x^2+2}\right)}=\dfrac{-2(1+x)}{2+\sqrt{2x^2+2}}$

$f(1)=\dfrac{-2(1+1)}{2+\sqrt{2+2}}=-1$ donc le prolongement par continuité de f en 1 est :

2) a) $D_g=IR$. Pour que g soit continue en 1 il suffit que $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=g(1)$

b) $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2-\sqrt{x^2+2}}{x-1}=-1$; $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{ax^2-9}{x-3}-5=\dfrac{a-9}{-2}-5$. g est continue en $1\Leftrightarrow\dfrac{-a+9}{2}-5=-1\Leftrightarrow 4=\dfrac{-a}{2}+\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-a}{2}\Rightarrow a=1$

c)Pour $a=1$; $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-9}{x-3}-5=\dfrac{4-9}{-1}-5=0$;

$\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-5}{x-3}=3$. On a $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)\ne\lim\limits_{x\to2^+} g(x)$ donc g est discontinue en 2.

3) Pour $a=1$; $D_c=IR/\{2\}$

Exercice N° 10:1) $D_1=\{x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[-\{2\}\ tel\ que : x^2-x+4\ge0\}$; $x^2-x+4=0$;
$\Delta=1-16=-17$ donc $x^2-x+4>0$, $D_1=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[-\{2\}$ (signe de a et a=1), f est bien définie sur D_1. $D_2=\{x\in]-1;1] ; x+1\ne0\}$, $x+1\ne0\Leftrightarrow x\ne-1$, $D_2=]-1;1]$ f est bien définie sur D_2. $D_f=D_1\cup D_2=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[-\{2\}\cup]-1;1]=IR-\{2\}$

2) f est continue en $-1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-1} f(x)=f(-1)$. $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\dfrac{\sqrt{6}+a}{-3}$,

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2+E(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}(x-1)=-2$ f est continue en -1

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)\Leftrightarrow-\dfrac{\sqrt{6}+a}{3}=-2\Leftrightarrow a=6-\sqrt{6}$

3) Sur $]-1;1[$; $f(x)=\dfrac{x^2+E(x)}{x+1}$; $E(x)=\begin{cases}-1 & si\ x\in]-1;0[\\ 0 & si\ x\in[0;1[\end{cases}$ donc $f(x)=\begin{cases}x-1 & si\ x\in]-1;0[\\ \dfrac{x^2}{x+1} & si\ x\in[0;1[\end{cases}$

On a : $x\to x-1$ fonction polynôme continue sur IR en particulier sur $[0;1[$

$x\to\dfrac{x^2}{x+1}$ fonction rationnelle continue sur $IR/\{-1\}$ en particulier sur $[0;1[$

continuité en 0 : $f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} x-1=-1\ne f(0)$ Donc f n'est pas continue en 0

Continuité en1 : $f(1)=a-2=4-\sqrt{6}$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{1}{2}\ne f(1)$ Donc f n'est pas continue en 1.

Conclusion : f est continue sur : $]-1;0[\cup]0,1[$

Exercice N° 11: La seule fonction prolongeable par continuité en 1 est f son prolongement par continuité est la fonction $\varphi : x\to\begin{cases} f(x) & si\ x\ne1\\ 2 & si\ x=1\end{cases}$

Exercice N° 12 : I- 1) $D_f=[-3;7]\setminus\{4\}$ 2) $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=1$; $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=2$

3) a- oui, car g est définie en 1. ζ_g a une rupture au point d'abscisse 1 alors g n'est pas continue en 1.
b- non, car g n'est pas définie en 4.

c- $\lim\limits_{x\to4} g(x)=2$ donc g est prolongeable par continuité en 4 et on a : $\begin{cases}J(x)=g(x) & si\ x\ne4\\ J(4)=2\end{cases}$.

4) a) 3 est un majorant de f(x). b) On a f(5) = 3 alors 3 est un maximum de f(x).
5) Le minimum de f(x) st -3 et on a f(-2) = -3.
6) a) $g(]-3;1[)=]-3;1[$; $g([0;4[)=[-2;2]$; $g(]4;7])=[-1;3]$. b) $g(x)\in[-3;2]\Leftrightarrow x\in[-3;4[$.

II- 1) a) si x < - 3. $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-10x-30}{x+3}=\dfrac{(x+3)(x^2-10)}{x+3}=x^2-10$.

b) $\lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-3)^-} h(x)=-1$ b) $\lim\limits_{x\to(-3)} f(x)=f(-3)=-1$ $\lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x)$ donc f est continue en -3.

d) La fonction $x \mapsto \dfrac{x^3+3x^2-10x-30}{x+3}$ est rationnelle alors elle est continue sur $IR\setminus\{-3\}$ donc f est continue sur $]-\infty;-3[$. La fonction $x \mapsto x+3$ est un polynôme alors elle est continue sur IR et $\forall x \in [-3;+\infty[$, $x+3 \geq 0$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x+3}$ est continue sur $[-3;+\infty[$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -1$ sont deux polynômes alors elles sont continues sur IR donc elles sont continues sur $[-3;+\infty[$ donc f est continue sur $[-3;+\infty[$.

$\left.\begin{array}{l}\text{f est continue sur }]-\infty,-3[\\ \text{f est continue sur } [-3;+\infty[\\ \text{f est continue en -3}\end{array}\right\} \Rightarrow$ f est continue sur IR.

2) a) Soit la fonction Γ définie sur IR par : $\Gamma(x) = f(x) - x$. Comme les fonctions f et $x \mapsto x$ sont continues sur IR alors Γ est continue sur IR donc elle est continue sur $[-3;0]$.

$\left.\begin{array}{l}\Gamma \text{ est continue sur } [-3;0]\\ \left.\begin{array}{l}f(-3)=2\\ f(0)=-1\end{array}\right\} \Rightarrow f(-3)\times f(0)<0\end{array}\right\} \Rightarrow$ L'équation $\Gamma(x)=0$ admet au moins une solution a dans $[-3;0]$ c'est-à-dire l'équation f(x) = x admet au moins une solution a dans $[-3;0]$.

b) On a : $\left.\begin{array}{l}a \in [-3;0]\\ f(a)=a\end{array}\right\} \Rightarrow a\sqrt{a+3}-1=a$

$\Leftrightarrow a\sqrt{a+3} = 1+a \Rightarrow a^2(a+3) = (1+a)^2 \Leftrightarrow a^3+3a^2-a^2-2a-1=0 \Leftrightarrow a^3+2a^2-2a-1=0$ donc a est une solution de l'équation : $x^3+2x^2-2x-1=0$. c)

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{x^2\sqrt{x+3}^2-4}{(x-1)\left(x\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{x^3+3x^2-4}{(x-1)\left(x\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+4x+3)}{(x-1)\left(x\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim_{x\to1}\frac{x^2+4x+3}{x\sqrt{x+3}+2} = \frac{8}{4} = 2$$

Exercice N° 13 :

1) Il faut que $\begin{cases}2x+5\geq0\\ x-2\neq0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq-\frac{5}{2}\\ x\neq2\end{cases} \Rightarrow D_f = \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[/\{2\}$

2) Soit $x \neq 2$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} = \frac{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)} = \frac{2x+5-9}{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)} = \frac{2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2x+5}+3}$$

3) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\times2+5}+3} = \dfrac{2}{\sqrt{9}+3} = \dfrac{1}{3}$

4) Le prolongement par continuité de f est : $f(x) = \begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} & si \in \left[-\frac{5}{2};+\infty\right[-\{2\}\\ \dfrac{1}{3} & si\ x=2\end{cases}$

Exercice N°14 : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+2}$

1) On a $\forall x \in IR$; $\sqrt{x^2+1}+2 \geq 0$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+2} \geq 0$ d'autrepart $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \geq 1$ signifie que $\sqrt{x^2+1}+2 \geq 3$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+2} \leq \dfrac{1}{3}$ et par suite $\forall x \in IR ; 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{3}$

2) a) 0 n'est pas un minimum de f car $f(x) \neq 0$ $\forall x \in IR$

b) On a $f(0) = \frac{1}{3}$ et $\forall x \in IR$ on a $f(x) \leq f(0)$ signifie que $\frac{1}{3}$ est un maximum pour f.

3) $\forall x \in IR$ on a $x \mapsto x^2+1$ est continue et positif sur IR donc $\sqrt{x^2+1}$ est continue sur IR

$\forall x \in IR$, on a $x \mapsto \sqrt{x^2+1}+2$ différent de 0 donc $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+2}$ est continue sur IR.

4) $h(x) = f(x) - x$ $x \in IR$

a) h est continue sur $[0;1]$; $h(0) = \frac{1}{3}$; $h(1) = f(1) - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+2} - 1 < 0$; on a $h(0)\times h(1) < 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in [0;1]$ (théorème des valeurs intermédiaires)

b) $h(0) = \frac{1}{3} \geq 0$; $h(0.1) = \dfrac{1}{\sqrt{(0.1)^2+1}+2} - 1 < 0$ donc $\alpha \in [0;0.1]$.

II) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

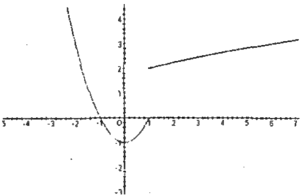
1) Il faut que $x+1 \geq 0$ et $x \neq 0$ signifie que $D_g = [-1;+\infty[\setminus\{0\}$

2) $\lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \dfrac{1}{2}$ donc g est prolongeable par continuité en 0.

Exercice N°15 : $f(x) = \begin{cases}x^2-1 & si\ x \leq 1\\ \sqrt{x+2} & si\ x > 1\end{cases}$

1) $x \mapsto x^2-1$ est une fonction polynôme donc continue sur IR en particulier sur $]-\infty;1]$

$x \mapsto x+3$ est continue sur $]1;+\infty[$ et $x+3>0$ $\forall x \in]1;+\infty[$ donc $\sqrt{x+3}$ est continue sur $]1;+\infty[$



2) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} x^2-1 = 0$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{x+3} = 2$

On a $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ donc f est discontinue en 1

3) a) Voir figure

b) La courbe de f présente une rupture au point d'abscisse 1

Donc f n'est pas continue sur IR.

c) A l'aide du graphique $f([-1;0]) = [-1;0]$ et $f([0;6]) = [-1;0]\cup[2;3]$

4) $\lim\limits_{x\to6} \dfrac{f(x)-f(6)}{x-6} = \lim\limits_{x\to6} \dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} = \lim\limits_{x\to6} \dfrac{x-6}{(x-6)(\sqrt{x+3}-3)} = \lim\limits_{x\to6} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+3} = \dfrac{1}{6}$

Exercice N°16 : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{si } x>2 \\ \dfrac{2x^2-5x+3}{4(x-1)} & \text{si } x\le 2 \end{cases}$

1) $\rightarrow \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ est bien définie sur $]2;+\infty[$; $\dfrac{2x^2-5x+3}{4(x-1)}$;

$x\neq 1$ d'où $D_f =]2;+\infty[\cup]-\infty;2]\setminus\{1\} = IR\setminus\{1\}$

2) $x\in]2;+\infty[$ on a $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \dfrac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\dfrac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}$

3) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \dfrac{1}{4} = f(2)$ d'où f est continue à droite en 2 ; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{2x^2-5x+3}{4(x-1)} = \dfrac{1}{4} = f(2)$ d'où f est continue à gauche en 2 et par suite f est continue en 2.

4) On a $\sqrt{x+2}+2>2$ signifie que $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}<\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}>0$ d'où $0<\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}<\dfrac{1}{2}$ signifie que $0<f(x)<\dfrac{1}{2}\forall x\in]2,+\infty]$

5) sur $]-\infty;2]$ on a $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+3}{4(x-1)}$; $2x^2-5x+3 = 2(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ d'où $f(x) = \dfrac{2x-3}{4}$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\dfrac{1}{4}$ Donc la fonction $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x\in]-\infty;2] \\ -\dfrac{1}{4} & \text{si } x=1 \end{cases}$ est un prolongement par continuité de f en 1.

Exercice n°17 : 1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;-3\}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de x + 2		-	0	+	
|x + 2|		-x - 2		x + 2	

2) $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{-x-2-1}{(x+1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{-1}{(x+3)} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+2-1}{(x+1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{(x+3)} = \dfrac{1}{2}$

2) a)

$\lim\limits_{x\to3} g(x) = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2+7-16}{(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4} = \dfrac{3}{4}$

b) on a $\lim\limits_{x\to3} g(x) = \dfrac{3}{4}$ et $g(3) = \dfrac{3}{4}$ donc g est continue en 3.

3) a) •) $\lim\limits_{x\to2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x^3-x-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-} x^2+2x+3 = 11$ •) $\lim\limits_{x\to2^+} h(x) = 3+2m$

h est continue en 2 si et seulement si $3+2m = 11 \Leftrightarrow m=4$.

b) Les fonctions : $x\mapsto \dfrac{x^3-x-6}{x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ comme une fonction rationnelle donc h est continue sur $]-\infty;2[$; $x\mapsto x^2+5$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme une fonction polynôme et à valeur strictement positive donc

$x\mapsto\sqrt{x^2+5}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et comme $x\mapsto 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme une fonction polynôme alors : $x\mapsto\sqrt{x^2+5}+4x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et par suite h est continue sur $[2,+\infty[$.

On aura : h est continue sur $]-\infty,2[$, h est continue sur $[2;+\infty[$ et h est continue en $2\Rightarrow$ h est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice N° 18:

1) Il faut que $\begin{cases}x+2\ge0\\x+1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[-2\,;\,+\infty[\\x\neq-1\end{cases}\Rightarrow D_f = [-2;+\infty[-\{-1\}$

2) $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x+2}+x)(\sqrt{x+2}-x)}{(x+1)(\sqrt{x+2}-x)} = \dfrac{x+2-x^2}{(x+1)(\sqrt{x+2}-x)} = \dfrac{-(x+1)(x-2)}{(x+1)(\sqrt{x+2}-x)} = \dfrac{-(x-2)}{\sqrt{x+2}-x}$;

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{-(x-2)}{\sqrt{x+2}-x} = \dfrac{3}{2}$

3)On a : $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \dfrac{3}{2}$ donc f admet un prolongement par continuité en -1 :

$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}+x}{x+1} & si\ x\neq-1 \\ \dfrac{3}{2} & si\ x=-1 \end{cases}$

4)a) $D_1 = \{x\in]-1\,;+\infty[\ \textit{tel que}\ f(x)\ \textit{soit définie}\} =]-\infty;-1[$

$D_2 = \{x\in]-\infty\,;-1[\ \textit{tel que}\ x+1\neq0\} =]-\infty;-1[$; $D_g = D_1\cup D_2\cup\{-1\} = IR$

b) $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{x^3+2x^2+x}{x+1}\right)+\dfrac{3}{2}$, $x^3+2x^2+x=0$;

on a $(-1)^3+2\times(-1)^2+(-1)=0$ donc (-1) est solution de

$x^3+2x^2+x=0 \Leftrightarrow x^3+2x^2+x = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c$

$= ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$; $\begin{cases}a=1\\a+b=2\\b+c=1\\c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=1\\c=0\end{cases}$ Donc $x^3+2x^2+x=(x+1)(x^2+x)$

$\lim_{x\to-1^-} g(x)=\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{(x+1)(x^2+x)}{x+1}\right)+\frac{3}{2}=\lim_{x\to-1^-}\left(x^2+x+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$;

On a $\lim_{x\to-1^-} g(x)=\lim_{x\to-1^-} g(x)=\frac{3}{2}$ Donc g est contenue en -1

c) On a $x\mapsto \frac{x^3+2x^2+x}{x+1}+\frac{3}{2}$ est continue sur $]-\infty;-1[$; f est continue sur $]-1;+\infty[$; g est continue en -1 et par suite $Dc_g=IR$

Exercice N° 19 :

1) Pour tout réel x il existe un entier relatif unique n *tel que* : $n\le x\langle n+1$ *alors* $E(x)=n$. La fonction f est définie sur IR.

- Si $x\in[n\,,n+1[$, *alors* $E(x)=n$. Donc la fonction f est continue sur tout intervalle de la forme $[n\,,n+1[$ avec $n\in\mathbb{Z}$. $\lim_{x\to n^+} f(x)=\lim_{x\to n^+}E(x)=n$
- Si $x\in[n-1\,,n[$ *alors* $E(x)=n-1$. $\lim_{x\to n^-} f(x)=n-1$.

Si f est continue-en n $(n\in\mathbb{Z})$ $\Leftrightarrow \lim_{x\to n^+} f(x)=\lim_{x\to n^-} f(x) \Leftrightarrow n=n-1 \Leftrightarrow 0=-1$ *impossible*

Donc f est discontinue en tout entier relatif n.

Comme f est continue sur $[n\,,n+1[$ *pour tout* $n\in\mathbb{Z}$. Donc f est continue sur $IR/\mathbb{Z}$.

2) On a : $x\mapsto E(x)$ est continue sur $IR/\mathbb{Z}$; $x\mapsto x$ est continue sur IR.

Etudions la continuité de g en tout entier relatif $n\in\mathbb{Z}$.

On a $E(x)=n$ signifie $g(n)=n-(n-n)^2=n$.

- Si $x\in[n\,,n+1[$ *alors* $E(x)=n$, $\lim_{x\to n^+} g(x)=\lim_{x\to n^+}\left(n-(x-n)^2\right)=n=g(n)$ cela signifie que g est continue à droite en n.

Si $x\in[n-1\,,n[$ *alors* $E(x)=n-1$, $\lim_{x\to n^-} g(x)=\lim_{x\to n^-}\left(n-1-(x-(n-1))^2\right)=n-1-1=n-2$ cela signifie que g n' est pas continue à gauche en n.

On a $n-2\ne n$ signifie que g est discontinue en tout $n\in\mathbb{Z}$. Enfin on obtient que g est continue sur $IR/\mathbb{Z}$.

Etudions maintenant la continuité de h :

On a : $x\mapsto x$ *continue sur* IR ; $x\mapsto x-E(x)$ *continue sur* $IR/\mathbb{Z}$

Etudions la continuité de h en tout entier relatif $n\in\mathbb{Z}$:

- Si $x\in[n\,,n+1[$ *alors* $h(x)=x-n-(x-n)^2$, $\lim_{x\to n^+} h(x)=0$
- Si $x\in[n-1\,,n[$ *alors* $h(n)=x-n+1-(x-n+1)^2$, $\lim_{x\to n^-} h(x)=0$

On a $\lim_{x\to n^-} h(x)=\lim_{x\to n^+} h(x)=h(n)$ cela signifie que h est continue en tout entier relatif n. Enfin on conclue que h est continue sur IR.

Exercice N°20:

1)

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
x^2-9		$+$	$-$	$+$

$x^2-9\ge 0$ *pour tout* $x\in]-\infty,-3]\cup[3\,,+\infty[$ donc f est bien définie sur chacun des intervalles $]-\infty,-3]$ *et* $[3,+\infty[$.

$x^2+7x+12=0$; $\Delta=1$, $x'=-3$ *et* $x''=-4$

$x^2+7x+12\ne 0$ *pour tout* $x\in IR/\{-4\,,-3\}$ donc f est définie sur $]-\infty,-1]\cup]3;+\infty[$

2) f est continue en -3 $\Leftrightarrow \lim_{x\to-3^-} f(x)=\lim_{x\to-3^+} f(x)=f(-3)$

$\lim_{x\to-3^-} f(x)=\lim_{x\to-3^-}\sqrt{x^2-9}+mx+2=-3m+2$

- Pour $x\in]-3\,,-2[$ *On a* $E(x)=-3$ *et* $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2+7x+12}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+4)}=\frac{x-3}{x+4}$

$\lim_{x\to-3^+} f(x)=\lim_{x\to-3^+}\frac{x-3}{x+4}=-6$

f est continue en -3 $\Leftrightarrow -3m+2=-6 \Leftrightarrow -3m=-8 \Leftrightarrow m=\frac{8}{3}$

Donc f est continue en -3 pour $m=\frac{8}{3}$.

3)

- Pour tout $x\in]-3\,,-2[$, $f(x)=\frac{x-3}{x+4}$.

Comme $x\mapsto\frac{x-3}{x+4}$ est continue sur $IR/\{-4\}$ alors f est continue sur $]-3\,,-2[$

- Pour tout $x\in[-2\,,-1[$ *On a* $E(x)=-2$ *donc* $f(x)=\frac{x^2-6}{x^2+7x+12}$.

$x\mapsto\frac{x^2-6}{x^2+7x+12}$ est continue sur $IR/\{-3\,,-4\}$, donc elle est continue sur $[-2,-1[$

Etudions la continuité de f à gauche en -2 :

On a $f(-2)=-1$. Pour tout $x\in]-3,-2[$, $f(x)=\frac{x-3}{x+4}$

$\lim_{x\to-2^-} f(x)=-\frac{5}{2}\ne f(-2)$ Donc f est discontinue à gauche en -2.

Etudions la continuité de f à gauche en -1 :On a $f(-1)=-\frac{1}{3}$

Pour tout $x \in]-2,-1[$, $f(x)=\frac{x^2-6}{x^2+7x+12}$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-6}{x^2+7x+12}=-\frac{5}{6}\neq f(-1)$ Donc f est discontinue à gauche en -1.

f est continue sur chacun des intervalles $]-3,-2[$ *et* $[-2,-1[$

4) Pour $m=\frac{8}{3}$,

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-9}+\frac{8}{3}x+2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}+\frac{8}{3}x+2\right)=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}-\frac{8}{3}-\frac{2}{x}\right)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-3^-}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=\lim_{x\to-3^-}\frac{\sqrt{x^2-9}+\frac{8}{3}x+2-\left(-3\times\frac{8}{3}+2\right)}{x+3}=\lim_{x\to-3^-}\frac{\sqrt{x^2-9}+\frac{8}{3}(x+3)}{x+3}$

$=\lim_{x\to-3^-}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}+\frac{8}{3}\right)=-\infty$

b) $f(x)=\frac{8}{3}x+3 \Leftrightarrow f(x)-\frac{8}{3}x-3=0$. On pose $H(x)=f(x)-\frac{8}{3}x-3$; $H(-4)=\sqrt{7}-1>0$;

$H(-3)=-1<0$; $H(-4)\times H(-3)<0$ alors $H(x)=0$ admet au moins une solution dans $[-4;-3]$ et par suite $f(x)=\frac{8}{3}x+3$ admet au moins une solution dans $[-4;-3]$.

Exercice N° 21 : 1) $f(2)=\frac{4+E\left(\frac{2}{3}\right)}{4}=\frac{4+0}{4}=1$

$E\left(\frac{x}{3}\right)=n \Leftrightarrow n\leq\frac{x}{3}\langle n+1 \Leftrightarrow 3n\leq x\langle 3n+3$; $E\left(\frac{x}{3}\right)=n \Leftrightarrow x\in[3n\ ;\ 3n+3[$.

Si $x\in[0;3[$ *alors* $E\left(\frac{x}{3}\right)=0$ *Donc* $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$

Si $x\in[3,6[$ *alors* $E\left(\frac{x}{3}\right)=1$ *Donc* $f(x)=\frac{x^2+1}{x+2}$

$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2}{x+2}=1=f(2)$ donc f est continue en 2 .

2) $\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2}{x+2}=\frac{9}{5}$, $\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2+1}{x+2}=\frac{10}{5}=2$.

On a $\lim_{x\to3^-} f(x)\neq\lim_{x\to3^+} f(x)$ et par suite f est discontinue en 3.

solutions

Exercice N°1 : 1) b) , c) et d ; 2) a) et c) . B) 1) c) ; 2) c) ;

Exercice N° 2 : A) 1) c) ; 2) c)

B) 1) faux : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$ donc la droite d'équation $y=3$ est une asymptote à C_f

2) faux : $\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ *et* $\lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=1$ est une asymptote à C_f.

3) Vrai : $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0$

Exercice N°3 : 1) le domaine de définition f_1 est IR, $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ asymptote horizontale d'équation y = 0 au voisinage de $-\infty$.

2) la courbe ζ_2 ne coupe pas les droites Δ : x = 2 et Δ' : x = -2 donc f n'est pas définie en 2 et en -2

$Df_2=IR/\{\ -2\ ,\ 2\ \}$

$\lim_{x\to+\infty} f_2(x)=2$, $\lim_{x\to-\infty} f_2(x)=2$, $\lim_{x\to(-2)^-} f_2(x)=+\infty$, $\lim_{x\to(-2)^-} f_2(x)=-\infty$, $\lim_{x\to(2)^-} f_2(x)=-\infty$, $\lim_{x\to2^+} f_2(x)=+\infty$

Asymptote horizontale la droite d'équation y = 2 Asymptote verticale les droites Δ : x = 2 et Δ' : x = -2

3) $Df_3=]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$ ζ_3 admet deux asymptote oblique Δ_1 et Δ_2

Δ_1 = (AB) avec A (1 , 0) , B (0 , -1) Δ_1 : y = ax + b

$a=\frac{-1-0}{0-1}=1$, $b=y-x=0-1=-1$, Δ_1 : y = x -1

Δ_2 = (AC) avec C (0 , 1) ; Δ_2 : y = α x + β , $\alpha=\frac{1-0}{0-1}=-1$, $\beta=y-x=1-0=1 \Rightarrow \Delta_2$: y = - x + 1

Exercice N° 4 : 1) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, $D_f=IR^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$.

$\lim_{x\to0^-}(x^2+1)=1$ *et* $\lim_{x\to0^-} x=0^-$ donc $\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$. $\lim_{x\to0^+} x=0^+$ *Donc* $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

2) $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$, $D_f=IR/\{3\}=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ et

$\lim_{x\to3}(x-3)=0$, deux cas à étudier

x	$-\infty$	3^-	3	3^+	$+\infty$
$x-3$	$-$		0	$+$	

On a $\lim_{x\to3}(x+1)=4$ *et* $\lim_{x\to3^+}(x-3)=0^+$, donc $\lim_{x\to3^+} f(x)=+\infty$,on a $\lim_{x\to3^-}(x-3)=0^-$, donc $\lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty$

3) $f(x)=\frac{1+2x}{1-3x}$, $D_f=IR/\frac{1}{3}=\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-3x}=-\frac{2}{3}$,

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{-3x}=-\frac{2}{3}$, $\lim_{x\to\frac{1}{3}}(1+2x)=\frac{5}{3}$ *et* $\lim_{x\to\frac{1}{3}}(1-3x)=0$., on a deux cas :

x	$-\infty$		$\left(\frac{1}{3}\right)^-$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^+$		$+\infty$
$1-3x$		+		0		-	

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-}(1-3x)=0^+$ *Donc* $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+}(1-3x)=0^-$ *Donc* $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+}f(x)=-\infty$

4) $f(x)=\dfrac{x-6}{(2x-1)^2}$, $D_f=IR/\left\{\frac{1}{2}\right\}=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{4x^2}=0$ de même

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. on a $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)^2=0^+$ *car* $(2x-1)^2\geq0$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(x-6)=-\dfrac{11}{2}$ ce ci donne

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{1}{(2x-1)^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=-\infty$

5) $f(x)=\dfrac{1+3|x|}{1-|x|}$

il faut que : $1-|x|\neq0 \Leftrightarrow x\neq1$ *ou* $x\neq-1$ *donc* $D_f=IR/\{-1\,;1\}=]-\infty,-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

x	$-\infty$	-1	0	1 $+\infty$
$f(x)$	$\dfrac{1-3x}{1+x}$	$\dfrac{1+3x}{1+x}$	$\dfrac{1+3x}{1-x}$	$\dfrac{1+3x}{1-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-3x}{1+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{3}=-3$, $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{1-3x}{1+x}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{1-3x}{1+x}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to(1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(1)^-}\dfrac{1+3x}{1-x}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty$

6) $f(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt{x}$, $D_f=\{x\in IR$ *tel que* $x+5\geq0$ *et* $x\geq0\}=[0\,;+\infty[$

Pour tout $x\in[0\,,+\infty[$ $f(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=\dfrac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}=\dfrac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ il résulte $x\mapsto+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}=0$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

7) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$; $D_f=[-1;1]$; $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=0$

Exercice N°5:1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^4-x-1=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4=+\infty$, 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^3+x=\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$,

3) On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{x}=3$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{3x-1}{x+1}}=\sqrt{3}$.

4) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}=+\infty$

5) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}+\sqrt{2x}=+\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{(x+1)^5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{x^5}=0$, 7) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}-1}+x^2=+\infty$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3+5x}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3}{x}=+\infty$,

9) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+}\dfrac{-1}{\sqrt{3x-1}}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$.

Exercice N° 6 :1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}$. f est bien définie si et seulement si $3-x^2>0$,

$3-x^2=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3}$ *ou* $x=\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$3-x^2$	-	0	+	0	-

Donc $D_f=\left]-\sqrt{3}\,,\sqrt{3}\right[$

On a $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{3})^+}3-x^2=0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to(-\sqrt{3})^+}\sqrt{3-x^2}=0^+$ cela donne que $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{3})^+}\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}=+\infty$

Aussi On a $\lim\limits_{x\to(\sqrt{3})^-}3-x^2=0^+$ cela donne que $\lim\limits_{x\to(\sqrt{3})^-}\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}=+\infty$.

2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$, $D_f=\left\{x\in IR/\dfrac{1-x^3}{1+x^3}\geq0 \text{ et } 1+x^3\neq0\right\}$. $1+x^3\neq0\Leftrightarrow x\neq-1$

* $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$, $x^2+x+1=0$, $\Delta=-3<0$, *Donc* $x^2+x+1>0$

*$1+x^3=(1+x)(x^2-x+1)$, $x^2-x+1=0$, $\Delta=-1<0 \Rightarrow x^2-x+1>0,\dfrac{1-x^3}{1+x^3}=\dfrac{(1-x)(x^2+x+1)}{(1+x)(x^2-x+1)}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x$	+		+	0	-
$1+x$	-	0	+		+
$\dfrac{1-x}{1+x}$	-	‖	+		-

$D_f=]-1\,,1\,[$; $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt{\dfrac{(1-x)(x^2+x+1)}{(1+x)(x^2-x+1)}}$

$\lim\limits_{x\to-1^+}(1-x)(x^2+x+1)=2$ (1) *et* $\lim\limits_{x\to-1^+}(1+x)(x^2-x+1)=0^+$ (2)

(1) *et* (2) donnent : $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{1-x^3}{1+x^3} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} \sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^+} \left|2+\frac{x-1}{\sqrt{3x-1}}\right|$

$x-1$ est contenue sur *IR* donc $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^+}(x-1) = -\frac{2}{3}$,

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^+} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^+}\left(2+\frac{x-1}{\sqrt{3x-1}}\right) = 2+\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^+}\frac{x-1}{\sqrt{3x-1}} = 2-\infty = -\infty$ il résulte que

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^+}\left|2+\frac{x-1}{\sqrt{3x-1}}\right| = +\infty$

4) $f(x) = \left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right|$, $D_f = \mathbb{R}-\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{x^2-3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right| = 0$ de même $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right| = 0$

$\lim\limits_{x\to(-\sqrt{3})^-}\left(\frac{1-2x}{x^2-3}\right) = \frac{1+2\sqrt{3}}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^+}\left(\frac{1-2x}{x^2-3}\right) = \frac{1+2\sqrt{3}}{0^+} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^+}\left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right| = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-}\left(\frac{1-2x}{x^2-3}\right) = \frac{1-2\sqrt{3}}{0^-} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right| = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(\frac{1-2x}{x^2-3}\right) = \frac{1-2\sqrt{3}}{0^+} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+}\left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right| = +\infty$

Exercice N°7 : 1) a) $D_f = IR\setminus\{2\}$; b) $y=2$; $x=2$; $y=ax+b$ avec $b=\frac{3}{2}$;

$a = \frac{\frac{3}{2}-0}{0-(-3)} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$ donc $y = \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

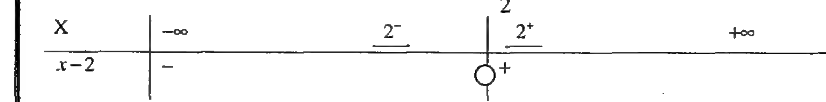
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right] = \frac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{4-x}{f(x)} = \lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{4}{f(x)}-\frac{x}{f(x)} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-x}{f(x)-2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

Exercice N° 8 :1) f est définie si et seulement si $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

donc $D_f = IR/\{2\} =]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$



X	$-\infty$		2^-	2	2^+		$+\infty$
$x-2$		$-$		0		$+$	

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+3}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-3x+3}{x-2}-\frac{x(x-2)}{x-2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+3}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x} = -1$

5) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = -1$, alors la droite d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$

Exercice n°9 : 1) a) $D_f = \mathbb{R}$. b) $f([-2;0]) = \{-3\}\cup[0;+\infty[$.

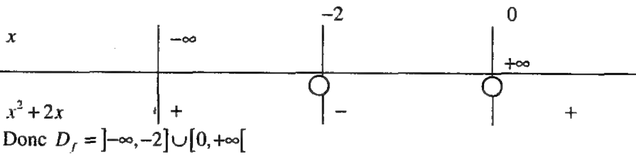
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$;; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(2x-\frac{1}{2}\right)\right] = 0$ car ζ_f est au dessous à $\Delta: y = 2x-\frac{1}{2}$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+\frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)+\frac{3}{2}} = -\infty$ (car ζ_f est au dessous à la droite: $y = -\frac{3}{2}$).

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x}{2x-\frac{1}{2}-f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{f(x)-\left(2x-\frac{1}{2}\right)} = +\infty\times-\infty = -\infty$. $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+1}{f(x)+x} = 0$

Exercice N° 10 :1) $f(x) = \sqrt{x^2+2x}$, 1) $x^2+2x\geq 0$



x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f =]-\infty,-2]\cup[0,+\infty[$

2)On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x} = +\infty$

3)Soit $x>0$, $f(x)-x = \sqrt{x^2+2x}-x = \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}-x = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x$ or $x>0$

$\Rightarrow f(x)-x = x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right) = \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} = \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)-x}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} = \frac{x+2-x}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$

4)On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x} = 1$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}} = 1$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x-1\right] = 0$. Donc la droite d'équation $\Delta: y = x+1$ est une asymptote

oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

5) Soit $x<0$

$$f(x)+x=\sqrt{x^2+2x}+x=-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x=-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right)=\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}=\frac{-x\left(1+\frac{2}{x}-1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}=$$

$\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right]=-1 \Leftrightarrow \Delta: y=-x-1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.

6) Soit $x<0$ $f(x)-y=\left[f(x)-(-x-1)\right]=f(x)+x+1=\sqrt{x^2+2x}+x+1$

$$=\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}+1=\frac{-2+\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

. On a $x<0$ *donc* $1+\frac{2}{x}<1 \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{2}{x}}\langle 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\langle 0$.

Donc $\left[f(x)-(-x-1)\right]<0$ *pour tout* $x<0$ et par suite la courbe de f est située au dessous de la droite $\Delta: y=-x-1$

Exercice N°11 : $y=-x+1$ est une asymptote au voisinage de $(-\infty)$; $x=-1$ est une asymptote verticale $y=0$ est une asymptote horizontale

1) f est discontinue en 1 car (ζ_f) présente un saut au point d'abscisse 1.

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ car la droite d'équation $y=0$ est une asymptote au voisinage de $(+\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=2$; c) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$; d) $\lim\limits_{x\to-1}|f(x)|=+\infty$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)=1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=-\infty$; f) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)}{f(x)-1}=-\infty$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=1$ car la droite d'équation $y=-x+1$ est une asymptote au voisinage de $(+\infty)$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)-2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x+1}-\frac{2x}{x+1}=0-2=-2$

Exercice N°12 : $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x^2+1} & \text{si } x\le 0\\ \frac{x^2+x}{x^2-x} & \text{si } x>0\end{cases}$

1) $x\mapsto x-\sqrt{x^2+1}$ est bien définie sur $]-\infty;0]$; $x\mapsto\frac{x^2+x}{x^2-x}$ est bien définie sur $]0;+\infty[\setminus\{1\}$

Donc $D_f=]-\infty;0]\cup]0;+\infty[=IR\setminus\{1\}$

2) a) Continuité en 0. On a $f(0)=-1$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=-1=f(-1)$ donc f est continue à

gauche en 0. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x+1}{x-1}=-1=f(-1)$ Donc f est continue à droite en 0 et par suite f est continue en 0.

b) $x\mapsto x^2+1$ est continue positif sur $]-\infty;0]$ donc $x\mapsto\sqrt{x^2+1}$ est continue sur $]-\infty;0]$; $x\mapsto x$ est continue sur $]-\infty;0]$ donc $x\mapsto x-\sqrt{x^2+1}$ est continue $]-\infty;0]$.

$x\mapsto\frac{x^2+x}{x^2-x}$ est continue sur $]0;+\infty[-\{1\}$ (fonction rationnelle) ; f est continue en 0 donc f est continue sur $IR-\{1\}$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1$ donc la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à ζ_f au voisinage de $(+\infty)$.

4) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$ donc la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à (ζ_f).

5) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=-\infty$ la courbe de f admet une branche infinie de direction l'axe des ordonnés

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{-x+\sqrt{x^2+1}}=0$ donc la droite $D: y=2x$ est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage de $(-\infty)$.

c) $f(x)-2x=-x-\sqrt{x^2+1}=\frac{-1}{-x+\sqrt{x^2+1}}<0$ car $x\in]-\infty;0]$ donc ζ_g est au dessous de D sur $]-\infty;0]$.

Exercice N° 13 : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+x+1} & \text{si } x\le-1\\ \frac{2x\sqrt{x+2}+2}{x+1} & \text{si } x>-1\end{cases}$

1) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\sqrt{x^2+x+1}=1=f(-1)$ donc f est continue à gauche en (-1) ;

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x\sqrt{x+2}+2}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{4x^2(x+2)-4}{(x+1)\left(2x\sqrt{x+2}-2\right)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{4\left(x^3+2x^2-1\right)}{(x+1)\left(2x\sqrt{x+2}-2\right)}$$

$=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{4(x+1)\left(x^2+x-1\right)}{(x+1)\left(2x\sqrt{x+2}-2\right)}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{4\left(x^2+x-1\right)}{2x\sqrt{x+2}-2}=1=f(-1)$ donc f est continue à droite en (-1) et par suite f est continue en (-1).

2) $x>-1$.

a) $f(x)=\frac{2x\sqrt{x+2}}{x+1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2x}{x+1}\sqrt{x+2}+\frac{2x}{x(x+1)}=\frac{2x}{x+1}\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\frac{2}{x}\right)=2\times+\infty=+\infty$

3)a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = -\dfrac{1}{2}$

b) la droite d'équation $y=-x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage de $(-\infty)$.

c) $f(x)-y=\sqrt{x^2+x+1}+x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}}$; $x\in\,]-\infty;-1]$ donc $-2x>0$ et $\sqrt{x^2+x+1}-x-1>0$

d'où $f(x)-y>0$ alors (ζ_f) est au dessus de D.

4) $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{f(x)}{f(x)-1} = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{1}{\frac{f(x)-1}{f(x)}} = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{1}{1-\frac{1}{f(x)}} = +\infty$

Exercice N° 14: 1) $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \Rightarrow D_f = IR/\{1\}$

2) $x-1\neq 0$, $f(x)=\dfrac{(ax+b)(x-1)^2+b+c}{(x-1)^2}=\dfrac{(ax+b)(x^2-2x+1)+c}{(x-1)^2}=\dfrac{ax^3-2ax^2+ax+bx^2-2bx+b+c}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b)x}{(x-1)^2}=\dfrac{x^3-x^2-x+5}{(x-1)^2}$, $\begin{cases}a=1\\b-2a=-1\\a-2b=-1\\b+c=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=1\\c=4\end{cases}$ donc $f(x)=x+1+\dfrac{4}{(x-1)^2}$.

3) On a $f(x)-(x+1)=\dfrac{5}{(x-1)^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=0$. Donc la droite d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de ∞.

4) $f(x)-y=\dfrac{5}{(x-1)^2}>0$ *pour tout* $x\in IR/\{1\}$; cela signifie que la courbe de f est située au dessus de son asymptote oblique.

Exercice N15:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}=\dfrac{x^2-3x+2+4}{x-2}=\dfrac{(x-1)(x-2)+4}{x-2}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}+\dfrac{4}{x-2}=x-1+\dfrac{4}{x-2}$

2) On a $f(x)-(x-1)=\dfrac{4}{x-2}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-2}=0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x-2}=0$ la droite $\Delta : y=x-1$ est une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

3) Pour déterminer la position de Δ *et* C_f, il faut étudier le signe de $f(x)-y$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	‖	$+$
Position de Δ *et* C_f	C_f au dessous de Δ	‖	C_f au dessus de Δ

Exercice N° 16 : 1) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$, il faut que $x^2-2x+2\geq 0$, $x^2-2x+2=0$, $\Delta=4-8=-4<0$, donc pour tout $x\in IR$, on a $x^2-2x+2>0$ ainsi $D_f=IR$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-2x+2}-x+1\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-2x+2-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}+x-1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+x-1}=0$, On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$ et par suite la droite d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-2x+2}+x-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}=0$ on a , Donc

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=0$ et par suite la droite d'équation $y=-x-1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$

4) $f(x)-y=\sqrt{x^2-2x+2}-x+1=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+x-1}\geq 0$. Donc C_f est au dessous de Δ.

$f(x)-y=\sqrt{x^2-2x+2}+x-1=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}-x+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)}\geq 0$. Donc C_f est au dessus de Δ'.

Exercice N°17 : 1) a) $f([-2;+\infty[)=]-\infty;0[\cup[0;+\infty[=IR$

b) $\Delta : y=ax+b$ avec $b=1$ l'ordonnée à l'origine ; $a=\dfrac{1}{1}=1$ donc $\Delta : y=x+1$

2) $g=\dfrac{1}{f}$ a) On a $f(x)=0$ pour $x=-2$ d'où $D_g=IR\setminus\{1;-2\}$

b) $\lim\limits_{x\to1} g(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{f(x)}=0$ donc g est prolongeable par continuité en 1

c) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} g(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^-} g(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ donc f n'est pas continue en (-2) .

d) f est croissante sur $[0;1[$. Soit a et b deux éléments de $[0;1[$ avec $a\leq b \Leftrightarrow f(a)\leq f(b) \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(a)}\geq\dfrac{1}{f(b)}$ donc $g(a)\geq g(b)$ et par suite g est décroissante sur $[0;1[$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$

Exercice N°18: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-x}$ .1) $x(x-1)\neq 0$ signifie que $x\neq 0$ et $x\neq 1$ donc $D_f=IR\setminus\{0;1\}$

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-1}{x^2-x}=-\dfrac{2}{2}=-1$; $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{x}=3$

b) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-x}=\frac{x^2+x+1}{x}=\frac{x(x+1)+1}{x}=\frac{x(x+1)}{x}+\frac{1}{x}=x+1+\frac{1}{x}$

c) i) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$; $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1))=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

ii) $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to0^-}f(x)=-\infty$. iii) $D: y=x+1$ est une asymptote oblique au voisinage de l'infini

$D: y=0$ est une asymptote verticale à (ζ_f)

d) On a $\lim_{x\to1}f(x)=3$ donc f est prolongeable par continuité en 1.

3) $f(x)=x^2$ signifie que $f(x)-x^2=0$. Soit $h(x)=f(x)-x^2$, $I=[\sqrt{2};2]$ h est continue sur $[\sqrt{2};2]$

$h(\sqrt{2})=f(\sqrt{2})-2=\sqrt{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}-2=\frac{3\sqrt{2}}{2}-1=\frac{3\sqrt{2}-2}{2}>0$; $h(2)=f(2)-4=3+\frac{1}{2}-4=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

On a $h(\sqrt{2})\times h(2)<0$ donc l'équation $h(x)=0$ admet au moins une solution α dans $[\sqrt{2};2]$

4) $g(x)=f(x)+ax+b=\frac{(1+a)x^2+(b+1)x+1}{x}$

a) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=2$ alors $1+a=0$ et $b+1=2$ donc $a=-1$ et $b=1$

b) $a=-1$ et $b=1$; $h(x)=\begin{cases}\sqrt{f(x)}+1 & \text{si } x\geq\alpha\\ \frac{x^3+1}{g(x)} & \text{si } x<\alpha\end{cases}$

$\lim_{x\to\alpha^+}h(x)=\sqrt{f(\alpha)}+1=\sqrt{\alpha^2}+1=\alpha+1$; $\lim_{x\to\alpha^-}h(x)=\frac{\alpha^3-1}{\alpha^2-\alpha+1}=\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)}{\alpha^2-\alpha+1}=\alpha+1$

$\lim_{x\to\alpha^+}h(x)=\lim_{x\to\alpha^-}h(x)$ d'où h est continue en α

Exercice N° 19 : 1) $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2x}{x-1}$. Pour que f soit définie, il faut que :

$\begin{cases}x+3\geq0\\x-1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq-3\\x\neq1\end{cases}$ Donc $D_f=[-3,+\infty[/\{1\}$. $g(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ Pour que g soit définie, il faut que :

$\begin{cases}x\geq0\\x-1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq0\\x\neq1\end{cases}$ Donc $D_g=[0,+\infty[/\{1\}$

2) a) $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2x}{x-1}=\frac{0}{0}$ F I. Pour résoudre ce problème, il faut éliminer le terme $x-1$ du dénominateur pour pouvoir donner cette limite.

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2x)(\sqrt{x+3}+2x)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2x)}=\lim_{x\to1}\frac{x+3-4x^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2x)}$,

remarquons que 1 est une solution de l'équation : $-4x^2+x+3=0$ donc $-4x^2+x+3=-4(x-1)\left(x+\frac{3}{4}\right)$,

ainsi $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{-4(x-1)\left(x+\frac{3}{4}\right)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2x)}=\lim_{x\to1}\frac{-4\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{x+3}+2x}=\lim_{x\to1}\frac{(-4x-3)}{\sqrt{x+3}+2x}=-\frac{7}{4}$

Même travail pour le calcul de $\lim_{x\to1}g(x)$:

$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}-2x-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-2x}{x-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2x}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=-\frac{7}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{5}{4}$

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2x}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\sqrt{x+3}-2x}{x-1}}{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-\frac{7}{4}}{\frac{1}{2}}=-\frac{7}{8}$

3) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=0$

Interprétation : puisque $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$, alors la droite d'équation : $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe de g.

Exercice N° 20 :

1)On a $\forall$ $x]-\infty;-2[$; $x\to\sqrt{x^2+5}-2x+1$ est bien définie, de même $x\to\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$ sur $[-2;+\infty[$.

Donc $D_f=]-\infty;-2[\cup[-2;+\infty[=IR$.

2)On a $f(2)=\frac{2^2-3\times2+2}{4+1}=\frac{0}{5}=0$; $\lim_{x\to2^-}f(x)=\sqrt{9}-4+1=0$, $\lim_{x\to2^+}f(x)=0$;

$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^-}f(x)=f(2)$ donc f est continue en 2.

3) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ donc la droite d'équation $y=1$ est un asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

4)a) Sur $]-\infty;-2[$ on a $f(x)=\sqrt{x^2+5}-2x+1=\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}-2x+1=|x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-2x+1$

$=-x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)-2x+1$, ($|x|=-x$ car $x<0$) $=-x\left[\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2-\frac{1}{x}\right]$.

b) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x\left[\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2-\frac{1}{x}\right]=+\infty$

5) $h(x)=f(x)+3x$; $x\in]-\infty;2[$

a) $h(x)=\sqrt{x^2+5}-2x+1+3x=\sqrt{x^2+5}+x+1=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+5}-x}+1=\dfrac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}-x}+1$

$=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}+1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}+1=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+3x\right]=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+3x-1\right]=0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-3x+1)\right]=0$. Alors la droite $\Delta : y=-3x+1$ est un asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

c) $f(x)-(-3x+1)=f(x)+3x-1=\sqrt{x^2+5}+x=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}$. on a : $x^2+5\geq x^2$

$\forall x\in\left]-\infty,2\right[$ donc $\sqrt{x^2+5}-x>0$; $\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}>0\ \forall x\in\left]-\infty,2\right[$ signifie

$f(x)-y>0\ \forall x\in\left]-\infty,2\right[$ et par suite la courbe de f se situe au dessus de la droite Δ *sur* $\left]-\infty,2\right[$.

Exercice N° 21:1) On a pour tout $x\in\left]-\infty,1\right[$ on a :

* $x\to x(x-1)\neq 0$ * $x\to\sqrt{x^2+3}+ax$ est bien définie sur $\left[1,+\infty\right[$ donc $D_f = IR$

2) a/

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		-	0	+		+	
x – 1		-		-	0	+	
x(x –1)		+	0	-	0	+	

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty$ Donc la droite $\Delta : x=0$ est une asymptote verticale à la courbe de f .

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ Donc la droite $\Delta : y=1$ est une asymptote horizontale à la courbe de f .

3) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x-1)\ (x-2)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-2}{x}=-1$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\sqrt{x^2+3}+ax\right)=\sqrt{4}+a=2+a$, f est continue en 1 si $2+a=-1 \Leftrightarrow a=-3$

4) a = -3 .a) $x\geq1$; $f(x)=\sqrt{x^2+3}-3x$, $f(x)=\sqrt{x^2+3}-3x=\sqrt{x^2\dfrac{(x^2+3)}{x^2}}-3x$

$=|x|\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2}}-3x=x\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2}}-3$ car $x\geq1=x\left(\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2}}-3\right)$

b) on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3}{x^2}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2}}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2}}-3=-2\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2}}-3\right)=-\infty$

c) $f(x)+2x=\sqrt{x^2+3}-3x+2x=\sqrt{x^2+3}-x=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\ \left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+3}+x}=\dfrac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$

d) on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$ signifie $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-2x)]=0$ et par suite la droite d'équation $\Delta : y=-2x$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

e) $f(x)-y=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$ on a $x\geq1$ sig $\sqrt{x^2+3}+x>0\Rightarrow f(x)-y>0$

donc la courbe de f est situe au dessus de Δ sur $]1,+\infty[$

Exercice N° 22 :1) $f(x)=\sqrt{x^2-4x}+x$ Il faut que $x^2-4x\geq0$

$x^2-4x=0$, $x=0$ ou $x=4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		+	0	-	0	+	

$D_f=\left]-\infty,0\right]\cup\left[4,+\infty\right[$

2) a/ Soit $x\in\left]-\infty,0\right[$

$f(x)=\sqrt{x^2-4x}+x=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-4x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)}{\sqrt{x^2-4x}-x}=\dfrac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}-x}=\dfrac{-4x}{\sqrt{x^2-4x}-x}$

b/ on a : $f(x)=\dfrac{-4x}{\sqrt{x^2-4x}-x}=\dfrac{-4x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)}-x}=\dfrac{-4x}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}}-x}=\dfrac{-4x}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}}-x}$

; $|x|=-x$ car $x\in\left]-\infty,0\right[=\dfrac{-4x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1\right)}=\dfrac{4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1}$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$

La droite D d'équation y = 2 est une asymptote horizontale à (ζ_f)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4x}+x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2-4x}{x^2}}+1$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x}{x^2}=1$ *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2-4x}{x^2}}=1$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$

$f(x)-2x=\sqrt{x^2-4x}+x-2x=\sqrt{x^2-4x}-x=\dfrac{-4x}{\sqrt{x^2-4x}+x}=\dfrac{-4x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)}+x}=\dfrac{-4x}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}}+x}=\dfrac{-4x}{x\sqrt{1-\frac{4}{x}}+x}$

; $|x|=x$ car $x>0=\dfrac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1=2$; Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1}=-2$

4) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=-2$

$f(x)-2x=\sqrt{x^2-4x}-x$; $f(x)-(2x-2)=\sqrt{x^2-4x}-x+2=\dfrac{x^2-4x-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x}+x-2}$

Remarque que $x^2-4x = (x-2)^2+4$. Donc $f(x)-(2x-2) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2-4x}+x-2}$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-2)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4x}+x-2} = 0$ Cela signifie que la courbe de f admet une asymptote oblique D' d'équation $y = 2x-2$ au voisinage de $+\infty$

Exercice N° 23 : 1) $D_f =]-\infty;-2]\cup]-2;1]\cup[1;+\infty[= IR$

2) $f(1) = \dfrac{4(\sqrt{2-1}-2)}{1-|1+1|} = \dfrac{-4}{-1} = 4$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{4(\sqrt{2-x}-2)}{1-|x+1|} = 4 = f(1)$ donc f est continue à gauche en 1

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)^3}{x^2+3x-4} = \dfrac{0}{0}$ F.I ; $x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)^3}{(x-1)(x+4)} = 0 \neq f(1)$

Donc f est discontinue en 1 à droite et par suite f est discontinue en 1.

3) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)^3}{x^2+3x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-6)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)^3-(x-6)(x^2+3x-4)}{x^2+3x-4}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1-x^3-3x^2+4x+6x^2+18x-24}{x^2+3x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{25x-45}{x^2+3x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{25x}{x^2} = 0$

donc la droite d'équation $y = x-6$ est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage de $(+\infty)$.

4) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{4(\sqrt{2-x}-2)}{1-(x+1)} = \dfrac{4(\sqrt{2}-2)}{0^+} = -\infty$ (car $\sqrt{2}-2<0$) ; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (ζ_f).

5) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-}\sqrt{9x^2+7x+3}+mx = 5-2m$; $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{4(\sqrt{2-x}-2)}{1-(x+1)} = 0$

f est continue en (-2) si et seulement si $5-2m = 0 \Leftrightarrow -2m = -5 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}$

6) $m = 3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+7x+3}+3x = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^2+7x+3-9x^2}{\sqrt{9x^2+7x+3}-3x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+3}{-x\left(\sqrt{0+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}+3\right)} = -7$

La droite d'équation $y = -7$ est une asymptote horizontale à (ζ_f)

Exercice N°24: I) $g(x) = \dfrac{1-x^3}{x^2+x-2}$

1) Soit l'équation $x^2+x-2 = 0$; $a+b+c = 0 \Rightarrow x = 1$ et $x = -2$. donc $D_g = IR\setminus\{-2;1\}$.

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{x^3}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3}{x^3} = -1$

b) $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1-x^3}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{-9}{0^+} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{1-x^3}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{-9}{0^-} = -\infty$

la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote horizontale à (ζ_g) au voisinage de l'infini

3) a) $g(x) = \dfrac{1-x^3}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{(1-x)(x^2+x+1)}{(x+2)(x-1)} = -\dfrac{x^2+x+1}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to1} g(x) = \lim\limits_{x\to1}\left(-\dfrac{x^2+x+1}{x+2}\right) = -1$ Donc g est prolongeable par continuité et $h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x\in D_g \\ -1 & \text{si } x = 1\end{cases}$

b) $h(x) = -\dfrac{1+x+x^2}{x+2}$; $x\neq-2$; h est une fonction rationnelle donc continue sur $IR\setminus\{-2\}$.

II) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1}-x & \text{si } x\geq1 \\ -\dfrac{1+x+x^2}{x+2} & \text{si } x<1\end{cases}$

1) $f(1) = -1$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x^2-1}-x = -1 = f(1)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} -\dfrac{1+x+x^2}{x+2} = -1 = f(1)$ donc f est continue en 1.

2) a) $x\in[1;+\infty[$; $f(x) = \sqrt{x^2-1}-x = \dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = \dfrac{-1}{+\infty} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage de $(+\infty)$.

3) a) $x\in]-\infty;-1[$ on

$a: -x+1-\dfrac{3}{x+2} = -(x-1)-\dfrac{3}{x+2} = -\dfrac{(x-1)(x+2)+3}{x+2} = -\dfrac{x^2+2x-x-2+3}{x+2} = f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{x+2} = 0$ donc la droite d'équation $y = -x+1$ est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage de $(-\infty)$.

c) $f(x)-(-x+1) = \dfrac{-3}{x+2}$

x	$-\infty$	-2	1
$f(x)-y$	+	‖	−
Position	ζ_f / D	‖	D/ζ_f

Exercice N°25 :

1) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} 2x+\sqrt{x^2-4} = 4$; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+2}{x-1} = 4$

On a $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = f(2) = 4$ D'où f est continue en 2.

2) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-4}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+2}{x-1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+2}{x-1} = -\infty$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (ξ_f).

3) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0$ donc $\Delta: y=3x$ est une asymptote à ξ_f au voisinage de $+\infty$.

4) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ donc la droite $\Delta': y=1$ est une asymptote horizontale à (ξ_f) au voisinage de $-\infty$.

b) $f(x)-1=\dfrac{x^2-4-x^2+3x-2}{x^2-3x+2}=\dfrac{3x-6}{x^2-3x+2}$

x	$-\infty$	1	2
$3x-6$	$-$		$-$
x^2-3x+2	$+$	0	$-$
$f(x)-1$	$-$		$+$
Position	Δ'/ξ_f		ξ_f/Δ'

Exercice 26 : $f(x)=\sqrt{x^2+6x+8}$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+6x+8=+\infty$ et $x^2+6x+8>0$ sur $[2,+\infty[$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+6x+8}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+6x+8}=+\infty$

2)a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+6x+8-x^2-6x-9}{\sqrt{x^2+6x+8}-x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+6x+8}-x-3}=0$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3)}=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+(x+3)\right]=0$ donc la droite d'équation $\Delta: y=-x-3$ est un asymptote oblique au $v(-\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=0$ donc la droite $\Delta': y=x+3$ est asymptote oblique au $v(+\infty)$.

c) $f(x)-(x+3)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+6x+8}+x+3}<0$ donc (C) est au dessus de Δ'.

$f(x)+(x+3)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+6x+8}-x-3}<0$ donc (C) est au dessus de Δ.

Solutions

Exercice1 :1) f (1) =2 , f(2) = 0 , f(3) = -2

2) La tangente au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses et par suite f'(1)= 0 de même on a : f' (3) = 0

Le nombre dérivée de f en 2 est la pente de la tangente à (C) en 2 or la tangente a (C) au point d'abscisse 2 passe par les points de coordonnées (2,0) et (0, 6) . Donc f' (2) = $\dfrac{6-0}{0-2}=-3$

Exercice2 :1) Faux car f(x) = $|x|$ continue en 0 et n'est pas dérivable en 0 .

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$; $-1\neq1$

2) Faux exemple f(x) = x continue et dérivable en a $\forall\ a\in IR$.

3) Vrai car f n'est pas continue $\Rightarrow$ f n'est pas dérivable.

Exercice 3 :1) $f(x)=2x^3-4x+3$, a = 1 ; f est une fonction polynôme donc dérivable en tout réel a et f'(a) = 6a² - 4 . Donc f'(1) = 6 × 1² - 4 = 2

soit Δ la tangente au point d'abscisse 1 ; Δ : y = f'(1) (x – 1) + f(1)= 2 (x – 1) + 1 = 2x – 1

2) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x+2}$, $a=2$; $D_f=IR/\{-2\}$ f est une fonction rationnelle donc dérivable en tout réel a de $IR/\{-2\}$ On pose h(x) = x² - 4x +1 ; k(x) = x + 2 ; h et k sont dérivable sur IR

h'(a) = 2 a – 4 ; k'(a) = 1

k(a) ≠ 0 donc f est dérivable en tout réel a ≠ -2 et $f'(a)=\dfrac{h'(a)\,k(a)\ -\ k'(a)\,.\,h(a)}{(k(a))^2}$

pour a = 2 : $f'(2)=\dfrac{h'(2)\quad k(2)\ -\ k'(2)\quad h(2)}{(k(2))^2}=\dfrac{0\times4-1\times(-3)}{16}=\dfrac{3}{16}$

$\Delta: y=f'(2)(x-2)+f(2)=\dfrac{3}{16}(x-2)-\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}x-\dfrac{9}{8}$

3) $f(x)=x-\sqrt{2x+1}$; $D_f=\left[-\dfrac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$ .Soit h(x) = x ; h est dérivable en tout réel a et h'(a) = 1

Soit $k(x)=\sqrt{2x+1}$; $x\to2x+1$ est dérivable sur IR ona :2x + 1 > 0 donc $\sqrt{2x+1}$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ et $k'(a)=\dfrac{2}{2\sqrt{2a+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2a+1}}$ et par suite $f'(a)=1-\dfrac{1}{\sqrt{2a+1}}=\dfrac{\sqrt{2a+1}-1}{\sqrt{2a+1}}$

Pour a = 4 : $f'(4)=\dfrac{\sqrt{9}-1}{\sqrt{9}}=\dfrac{2}{3}$; Δ : y = f'(4) (x – 4) + f(4)$=\dfrac{2}{3}(x-4)+1=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{8}{3}+1=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$

4) $f(x)=|1-x^2|$; $D_f=IR$

$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & si\ x\in[-1\,,1]\\ x^2-1 & si\ x\in\left]-\infty\,,-1\right]\cup\left[1\ ,\ +\infty\right[\end{cases}$. On pose $Q(x)=\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

Si $x\in[-1\,,1]$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+}Q(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1-x^2}{1+x}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}1-x=2$

Donc f est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1)=2$

Si $x\in\left]-\infty\ ,\ -1\right]$, $Q(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1$ .Donc $\lim\limits_{x\to(-1)^-}Q(x)=-2$

Donc f est dérivable à gauche en -1 et $f'_g(-1)=-2$

$f'_d(-1) \neq f'_g(-1)$ Alors f n'est pas dérivable en -1

La courbe de f admet deux demi tangentes, une à droite de pente 2 , et une à gauche de pente -2 .

$\Delta_d : y = f'_d(-1)(x+1) + f(-1) = +2(x+1) + 10 = 2x+2 \quad ; \ x \geq -1$

$\Delta_g : y = f'_g(x+1) + f(-1) = -2(x+1) + 0 = -2x - 2 \quad : \ x \leq -1$

Exercice N°4 : $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si \ x \geq -1 \\ -2x & si \ x < -1 \end{cases}$

1) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{x^2+1-2}{x+1} = \lim\limits_{x \to (-1)^+} (x-1) = -2$

$\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{-2x-2}{x+1} = -2$

2) on a $f'_g(-1) = -2 \quad ; \ f'_d(-1) = -2 \ ; \ f'_g(-1) = f'_d(-1)$ Donc f est dérivable en -1

3) $\Delta : y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = -2(x+1) + 2 = -2x$

Exercice N°5 : $f(x) = \sqrt{1-2x}$ .1) $D_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$. Soit a Є D_f . On pose pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[/ \{a\}$

$$\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1-2a}}{x-a} = \frac{\left(\sqrt{1-2x}-\sqrt{1-2a}\right)\left(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-2a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-2a}\right)}$$

$$= \frac{1-2x-1+2a}{(x-a)\left(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-2a}\right)} = \frac{-2}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-2a}}$$

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \frac{-2}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-2a}} = \frac{-1}{\sqrt{1-2a}}$$

Et par suite f est dérivable en tout réel $a \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et $f'(a) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-2a}}$.

2) $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{\sqrt{1-2x}}{x-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{\sqrt{1-2x}}{\frac{1}{2}(2x-1)} = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{2\sqrt{1-2x}}{2x-1} = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{-2}{\sqrt{1-2x}} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$

3) $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ a/ $D_g = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[/ \{0\}$ g est une fonction dérivable sur un ensemble de définition qui est $D_g = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[/ \{0\}$

Soit $a \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[/ \{0\}$

$$g'(a) = \frac{f'(a) \times a - 1 \times f(a)}{a^2} = \frac{af'(a) - f(a)}{a^2} = \frac{\frac{-a}{\sqrt{1-2a}} - \sqrt{1-2a}}{a^2} = \frac{-a-1+2a}{a^2\sqrt{1-2a}} = \frac{a-1}{a^2\sqrt{1-2a}} = \frac{a-1}{a^2\sqrt{1-2a}}$$

b/ soit $\varphi(x) = \dfrac{g(x)-g(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{1-2x}}{x}}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{1-2x}}{x(x-\frac{1}{2})} = \dfrac{-2\sqrt{1-2x}}{x(1-2x)} = \dfrac{-2}{x\sqrt{1-2x}}$

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{-2}{x\sqrt{1-2x}} = -\infty$. Donc g n'est pas dérivable au $\frac{1}{2}$.

Exercice N°6 : 1) f et g dérivable an a alors

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$,$f(a) = g(a) = 0 \Leftrightarrow f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{x-a}; g'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{x-a}$

donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$

2) a/ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-2}{x-2}$. On pose $f(x) = x^2 + x - 2$; $g(x) = x - 2$; On a $f(2) = g(2) = 0$

f et g sont dérivables on 2 et $g'(2) = 1 \neq 0$Alors $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(2)}{g'(2)} = \dfrac{2\times2+1}{1} = 5$

b/ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{2x-6}$; soit $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$, $g(x) = 2x - 6$; $f(3) = g(3) = 0$

f et g sont dérivable en 3 et $g'(3) = 2 \neq 0$ donc $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{2x-6} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(3)}{g'(3)} = \dfrac{1}{8}$

c) Soit $f(x) = \sqrt{x^4+3x^2+2} - \sqrt{2}$ et $g(x) = x$; $D_f = IR / \{-1; -2\}$. Donc f est dérivable en 0 ; g est dérivable en 0. $g(0) = f(0) = 0$ et $g'(0) \neq 0$. Donc $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(0)}{g'(0)} = \dfrac{0}{1} = 0$

d/ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x-6}{(x+3)\left(\sqrt{x-2}-1\right)}$; soit $f(x) = 2x - 6$, $g(x) = (x+3)\left(\sqrt{x-2}-1\right)$; $f(3) = g(3) = 0$

$g'(3) = 1 \times 0 + 6 \times \frac{1}{2} = 3 \neq 0$ Donc $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x-6}{(x+3)\left(\sqrt{x-2}-1\right)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(3)}{g'(3)} = \dfrac{2}{3}$

Exercice N°7 :1) a) $f(-2) = 1$; $f(0) = 3$; $f(3) = 2$ .b) $f'(0) = 0$; $f'(3) = -1$

2) a) $T : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -x + 3 + 2 = -x + 5$.

b) Sur$[3; +\infty[$; ξ_f est au dessus de T ; Sur$[-2; 3]$ ξ_f est au dessous de T

3) a) La courbe de f admet une demi tangente verticale au point -2 donc f n'est pas dérivable en -2

b) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = -\infty$

4) $x = -3$ asymptote verticale au voisinage de $-\infty$; $y = \frac{1}{2}$ Asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

$y = -x - 3$ Asymptote oblique au voisinage de $-\infty$

Exercice N° 8 : 1) on a $f(0) = \frac{5}{4}$; $g(0) = \frac{5}{4}$. Soit le point $A(0, \frac{5}{4})$.

Puisque $f(0) = g(0) = \frac{5}{4}$ alors $C\cap(O,\vec{j}) = C'\cap(O,\vec{j}) = \{A\}$

2) f est une fonction polynôme donc dérivable en tout réel a et $f'(a) = 2a - 3$
g est une fonction rationnelle donc dérivable en tout réel $a \neq -3$

et $g'(a) = \frac{3}{4}\times\frac{3(a+3)-1(3a+5)}{(a+3)^2} = \frac{3}{(a+3)^2}$, donc $f'(0) = -3$: la pente de la tangente à ζ en A

$g'(0) = \frac{1}{3}$: la pente de la tangente à ζ' en A ; $f'(0)\cdot g'(0) = \frac{1}{3}(-3) = -1$
et par suite les tangentes à ζ et ζ' en A sont perpendiculaires

Exercice9 : 1) La courbe de f admet au point d'abscisse 2 deux demi tangentes de pentes différentes par suite f n'est pas dérivable en 2

2) $f'_d(2) = 0$ et $f'_g(2) = -2$

Exercice N° 10 : 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

2) a) $f(-2) = 1$; $f'(-2) = 0$; b) $(T): y = f'(-2)(x+2) + f(-2) \Leftrightarrow (T): y = x + 2$

c) $f(-1.999) = f(-2+0.001) = f(-2) + 0.001\times f'(-2) = 1 + 0 = 1$

3) $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0

Exercice N°11 : 1) $f(x) = x^2\sqrt{|x|}$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{x^2\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to0} x\sqrt{|x|} = 0$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

2) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x^2 - x + \frac{11}{5} & si\ x<3 \\ \frac{2x-1}{x+2} & si\ x\geq 3 \end{cases}$

a/ on a $g(3) = 1$; $\lim_{x\to3^-} g(x) = \lim_{x\to3^-}\left(\frac{1}{5}x^2 - x + \frac{11}{5}\right) = 1$ et $\lim_{x\to3^+} g(x) = \lim_{x\to3^+}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = 1$

On a $\lim_{x\to3^-} g(x) = \lim_{x\to3^+} g(x) = 1$ donc g est continue en 3

b/ $\lim_{x\to3^-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim_{x\to3^-}\frac{\frac{1}{5}x^2 - x + \frac{6}{5}}{x-3} = \lim_{x\to3^-}\frac{\frac{1}{5}(x^2-5x+6)}{x-3} = \lim_{x\to3^-}\frac{1}{5}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to3^-}\frac{1}{5}(x-2) = \frac{1}{5}$

$\lim_{x\to3^+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim_{x\to3^+}\frac{\frac{2x-1}{x+2}-1}{x-3} = \lim_{x\to3^+}\frac{x-3}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{5}$. On a $\lim_{x\to3^+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim_{x\to3^-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \frac{1}{5}$

Donc g est dérivable en 3 et $g'(3) = \frac{1}{5}$

Exercice N°12 : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & si\ x\neq 0 \\ f(0) = a & si\ x = a \end{cases}$

1) Il faut que $x + 1 \geq 0$, $x \geq -1$. Donc $D_f = [-1, +\infty[$

2) $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$

f est continue $\Leftrightarrow \lim_{x\to0} f(x) = f(0) = a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

3) pour $a = \frac{1}{2}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{2\sqrt{x+1}-2-x}{2x}\right) = \frac{[2\sqrt{x+1}-(2+x)][2\sqrt{x+1}+(2+x)]}{2x^2[2\sqrt{x+1}+2+x]}$

$= \frac{4(x+1)-(2+x)^2}{2x^2[2\sqrt{x+1}+2+x]} = \frac{-1}{2[2\sqrt{x+1}+2+x]}$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{-1}{2[2\sqrt{x+1}+2+x]} = -\frac{1}{8}$

Et par suite f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{8}$

Exercice N°13 : 1) $f(x) = \sqrt{x^4+3x^2+2}$; $x^4 + 3x^2 + 2 > 0$ donc $D_f = IR$

2) $x \mapsto x^4+3x^2+2$ est dérivable sur IR et On a $x^4+3x^2+2>0\ \forall x\in IR \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^4+3x^2+2}$ est dérivable sur IR et $f'(a) = \frac{4a^3+6a}{2\sqrt{a^4+3a^2+2}} = \frac{2a^3+3a}{\sqrt{a^4+3a^2+2}}$

3) pour $x \neq 1$. On a : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^4+3x^2+2}-\sqrt{6}}{x-1}$. Donc $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^4+3x^2+2}-\sqrt{6}}{x-1} = f'(1) = \frac{5}{\sqrt{6}}$

Exercice N°14 : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-1} & si\ -2\leq x<2 \\ x^2+x-\frac{1}{2} & si\ 2\leq x\leq 3 \\ ax+b & si\ x>3 \end{cases}$

1) $\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}\left(x^2+x-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2}$, $\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x\to2^-}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}$ et $\lim_{x\to2^-} f(x) \neq \lim_{x\to2^+} f(x)$

Donc f n'est pas continue en 2 ,et par suite f n' est pas dérivable en 2

2) f est dérivable en 3 donc :

$\lim_{x\to3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to3^+}\frac{ax+b-3a-b}{x-3} = \lim_{x\to3^+}\frac{a(x-3)}{x-3} = a$

$\lim_{x\to3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to3^-}\frac{x^2+x-\frac{1}{2}-12+\frac{1}{2}}{x-3} = \lim_{x\to3^-}\frac{x^2+x-12}{x-3} = \lim_{x\to3^-}\frac{(x-3)\ (x+4)}{x-3} = 7$

Donc a = 7

f est continue en 3 ; $f(3) = \frac{23}{2}$

$\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^+} f(x) = \frac{23}{2} = 3a + b \Leftrightarrow 3a + b = \frac{23}{2} \Leftrightarrow b = \frac{23}{2} - 3a = \frac{23}{2} - 21 = \frac{23}{2} - \frac{42}{2} = \frac{-19}{2}$. Donc $b = \frac{-19}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}-\dfrac{2}{3}}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{3\sqrt{x+2}-2(x-2)}{3(x-2)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{3(x-2)}\dfrac{\left(3-2\sqrt{x+2}\right)}{(x+2)}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{3-2\sqrt{x+2}}{3(x-2)\sqrt{x+2}}=-\infty$. D'où f n'est pas dérivable à droite en -2

Exercice N° 15 : I) $g(x)=2x^2+x+1$

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2+x+1-2a^2-a-1}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2-2a^2-x-a}{x-a}$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2(x+a)(x-a)+x-a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}2(x+a)+1=4a+1$.

2) $\Delta: y=5x$; la tangente et parallèle à Δ si et seulement si $f'(a)=5$ signifie que $4a+1=5$ signifie que $a=1$.

II) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-2x+1} & \text{si } x<0\\ g(x) & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ 1)

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{-2x+1}=1$; $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=1$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ donc g est continue en 0.

2) a)

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{-2x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x+1-1}{x\left(\sqrt{-2x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{\left(\sqrt{-2x+1}+1\right)}=-1$ donc g est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=-1$.

b) $T_{x\leq 0}: y=f'_g(0)x+f(0)$ signifie que $T_{x\leq 0}: y=-x+1$

3) a) $f'_d(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1)=1$

b) $T': y=f'_d(0)x+f(0)$ signifie que $T: y=x+1$

4) On a $f'_d(0)\neq f'_g(0)$. Donc f n'est pas dérivable en 0

Exercice N°16 : $f(x)=\dfrac{1-x^6}{1-x}$; $x\neq 1$

1) on a $1-x^6=(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$. Donc $f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$

2) f est dérivable en tout réel $a\in IR/\{1\}$

$f'(a)=\dfrac{-6a^5(1-a)+(1-a^6)}{(1-a)^2}=\dfrac{-6a^5+6a^6+1+a^6}{(1-a)^2}=\dfrac{1-6a^5+5a^6}{(1-a)^2}$

D'autre part : $f'(a)=1+2a+3a^2+4a^3+5a^4 \Leftrightarrow 1+2a+3a^2+4a^3+5a^4=\dfrac{1-6a^5+5a^6}{(1-a)^2}$

3) d'après 2) pour tout $x\neq 1$ on a $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4=\dfrac{1-6x^5+5x^6}{(1-x)^2}$

Exercice N°17 : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert et a un réel de I.
L'approximation affine de f est : $f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$ où h est voisin de 0.

1) soit la fonction $f(x)=x^2$; f est dérivable en tout réel x_0 et $f'(x_0)=2x_0$. On prend a = 1 ;
$f(1+h)\approx f(1)+h\,f'(1)=1+2h$. D'où $f(1+h)\approx 1+2h$. Donc $(1+h)^2\approx 1+2h$

2) soit la fonction $f(x)=x^4$, f est dérivable en tout réel x_0 et $f'(x_0)=4x_0^3$. On prend a = 1 ;
$f(1+h)\approx f(1)+h\,f'(1)\approx 1+h\times 4\approx 1+4h$; D'où $f(1+h)\approx 1+4h$. Donc $(1+h)^4\approx 1+4h$

3) soit la fonction $f(x)=x^n$; f est dérivable en tout réel x_0 et $f'(x_0)=n\,x_0^{n-1}$. On prend a = 1 ;
$f(1+h)\approx f(1)+h\,f'(1)\approx 1+h$. D'où $f(1+h)\approx 1+nh$. Donc $(1+h)^n\approx 1+nh$

4) soit la fonction $f(x)=\sqrt{x}$; f est dérivable en tout réel $x_0\in\,]0,+\infty[$ et $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$

On prend a = 1 ; $f(1+h)\approx f(1)+h\,f'(1)\approx 1+h\cdot\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{1}{2}h$; D'où $f(1+h)\approx 1+\dfrac{1}{2}h$

Donc $\sqrt{1+h}\approx 1+\dfrac{1}{2}h$

5) soit la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$; f est dérivable en tout réel $x_0\in IR/\{x_0\}$ et $f'(x_0)=\dfrac{-1}{x_0^2}$

On prend a = 1 ; $f(1+h)\approx f(1)+h\,f'(1)\approx 1+h\times(\dfrac{-1}{1})\approx 1-h$. D'où $\dfrac{1}{1+h}\approx 1-h$

Exercice N°18 : 1) $f(x)=\sqrt{3x+1}$, $D_f=\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right[$ f est dérivable en tout réel $a\in\left]-\dfrac{1}{3},+\infty\right[$

et $f'(a)=\dfrac{3}{2\sqrt{3a+1}}$. L'approximation affine de f est $f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$

Pour a = 0 on a $f(h)\approx f(0)+h\,f'(0)\approx 1+\dfrac{3}{2}h$

2) $\sqrt{1{,}00048}=\sqrt{3\times 0{,}00016+1}=f(0{,}00016)$, on prend h = 0,00016

$=1+\dfrac{3}{2}\times 0{,}00016=1{,}00024$

Exercice N°19 : $f(x)=(1+x)^n$, n ∈ IN*

1) soit la fonction $g(x)=x^n$ g est dérivable en tout réel x_0 et $g'(x_0)=n\,x_0^{n-1}$
Pour $x_0=1$, $g(1+h)\approx g(1)+h\,g'(1)\approx 1+nh$. Or $g(1+h)=(1+h)^n=f(h)$. D'où $f(h)\approx 1+nh$
Et par suite $(1+h)^n\approx 1+nh$

2) $(1{,}0002)^5\approx(1+0{,}0002)^5\approx 1+5\times 0{,}0002\approx 1{,}001$

Exercice N°20 : $f(x)=\dfrac{2}{x+5}$, $D_f=IR/\{-5\}$

1) f est dérivable en tout réel $x_0\in IR/\{-5\}$ et $f'(x_0)=\dfrac{-2}{(x_0+5)^2}$

L'approximation affine de f est ; $f(x_0+h)\approx f(x_0)+h\,f'(x_0)$

Pour $x_0=-1$; $f(-1+h)\approx f(-1)+h\,f'(-1)\approx\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}h$

2) $f(-1+h)=\dfrac{2}{h+4}$; $f(-1)+f'(-1)h=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}h$. L'erreur commise est $f(-1+h)-f(-1)-f'(-1)h$

$f(-1+h)-f(-1)-f'(-1)h=\dfrac{2}{h+4}+\dfrac{1}{8}h-\dfrac{1}{2}$. Montrons que $\forall h\in[-1,1]$ on a : $\dfrac{2}{h+4}+\dfrac{1}{8}h-\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{24}h^2$

$\frac{2}{h+4}+\frac{1}{8}h-\frac{1}{2}-\frac{1}{24}h^2=-\frac{h^2(h+1)}{24(h+4)}<0\ \forall\ h\in[-1,1]$

Exercice N°21 : 1) $f(x)=\sqrt{4x+5}$; $D_f=\left[-\frac{5}{4},+\infty\right[$

$4x+5>0$ sur $\left[-\frac{5}{4},+\infty\right[\Rightarrow\sqrt{4x+5}$ est dérivable en tout réel $a\in\left]-\frac{3}{4},+\infty\right[$ Et $f'(a)=\frac{4}{2\sqrt{4a+5}}$

Pour a = 5 ; $f'(5)=\frac{4}{2\sqrt{25}}=\frac{2}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}$

2) $\sqrt{25{,}0004}=\sqrt{25+0{,}0004}=\sqrt{4(5+0{,}0001)+5}=\sqrt{4\times5{,}0001+5}=f(5{,}0001)=f(5+0{,}0001)$

$\approx f(5)+0{,}0001\,f'(5)\approx5+\frac{0{,}0002}{5}\approx5{,}00004$

3) La valeur réelle est $\sqrt{25{,}0004}=5{,}00004$.

4) Soit la fonction $g(x)=\sqrt{x}$; g est dérivable en tout réel a > 0 et $g'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$

$\sqrt{4{,}008}=\sqrt{4+0{,}008}=f(4+0{,}008)=f(4)+0{,}008\ f'(4)=2+0{,}008.\frac{1}{4}=2{,}002$

La valeur réelle est 2,001999. L'erreur commise est 2,002 – 2,001999 = 0,000001

Exercice N°22 :

1) $\Delta:x=2$; $\Delta':y=ax+b$; $b=1$ $A(1;2)\in\Delta'$ donc $2=a+1\Rightarrow a=1$ d'où $\Delta':y=x+1$

2) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$; $\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to2^-}f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$;

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x-1)=0$; $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=0$

3) a) $f(1)=0$; $f'(1)=1$

b) $T:y=f'(1)(x-1)+f(1)=x-1+0=x-1$

c) Sur $[0;1]$; ξ_f est au dessous de T

Sur $[1;2[$; ξ_f est au dessus de T

Exercice n°23:

1) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=4$, 2/ $f'(-1)=0$, $f'(-3)=0$,

3/a) $f'_d(-4)=9$ b-f n'est pas variable a gauche en -4 car ζ_f admet à gauche en -4 une demi tangente verticale,

c) $\lim_{x\to-4}\frac{f(x)-f(-4)}{x+4}=-\infty$.

4) on a $x\to x^2$ dérivable en -1 alors f est dérivable en -1 donc g est dérivable en -1

$\Rightarrow g'(-1)=2\times(-1)f(-1)+(-1)^2\times f'(-1)=-2\times(-2)+0=4$,

b) $y=g'(-1)(x+1)+g(-1)=4x+4-2=4x+2$.

Exercice N°24 : $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3+x^2-x-\frac{3}{2} & si\ x<-1\\ \frac{x^2-x-2}{|x|+1} & si\ -1\le x\le2\\ \sqrt{x^2+5}-(x+1) & si\ x>2\end{cases}$

1) on a f(-1) = 0

$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\frac{1}{2}x^3+x^2-x-\frac{3}{2}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^3+2x^2-2x-3}{2(x+1)}$

$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^3+x^2+x^2-2x-3}{2(x+1)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2(x+1)+(x+1)(x-3)}{2(x+1)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x-3}{2}=-\frac{3}{2}$

Donc f est dérivable à gauche en -1 et $f'_g(-1)=-\frac{3}{2}$

$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{\frac{x^2-x-2}{|x|+1}}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-x-2}{(|x|+1)\ (x+1)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+1)\ (x-2)}{(|x|+1)\ (x+1)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x-2}{|x|+1}=-\frac{3}{2}$

Donc f est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1)=-\frac{3}{2}$ en fin : $f'_g(-1)=f'_d(-1)=-\frac{3}{2}$

et par suite f est dérivable en -1

2) <u>Dérivabilité en 0</u> : f (0) = -2

$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x^2-x-2}{-x+1}+2}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x^2-x-2-2x+2}{-x+1}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-3x}{x(-x+1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x-3}{1-x}=-3$

Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=-3$

$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^2-x-2}{x+1}+2}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x}{x(x+1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{x+1}=1$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=1$

Conclusion : f n'est pas dérivable en 0.

<u>Dérivabilité en 2</u> : On a f (2) = 0

$\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{\frac{x^2-x-2}{x+1}}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-x-2}{(x+1)\ (x-2)}=\lim_{x\to2^-}\frac{(x+1)\ (x-2)}{(x+1)\ (x-2)}=1$

Donc f est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2)=1$

$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2+5}-(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{2\ (2-x)}{(x-2)\ \left(\sqrt{x^2+5}+x+1\right)}=\lim_{x\to2^+}\frac{-2}{\sqrt{x^2+5}+x+1}=-\frac{1}{3}$

Donc f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2)=-\frac{1}{3}$

Conclusion : $f'_g(2)\neq f'_d(2)$ alors f n'est pas dérivable en 2 .

3) a/ si $x_0\in\left]-\infty,-1\right[$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{2}(x^3-x_0^3)+x^2-x_0^2+x_0-x}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{2}(x-x_0)\ (x^2+xx_0+x_0^2)+(x-x_0)\ (x+x_0)-(x-x_0)}{x-x_0}$$

$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{2}(x^2+xx_0+x^2)+x+x_0-1=\frac{3}{2}x_0^2+2x_0-1$;si $x_0\in\left]-\infty\ ,\ -1\right[$ alors $f'(x_0)=\frac{3}{2}x_0^2+2x_0-1$

b/ on a $-2\in\left]-\infty\ ,-1\right]$. L'équation de la tangente est $\Delta: y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$

$f'(-2)=1$, $f(-2)=\frac{1}{2}$. Alors $\Delta: y=1(x+2)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=x+\frac{5}{2}$

c/ $D: 5x+8y+1=0\Leftrightarrow D: y=-\frac{5}{8}x-\frac{1}{8}$

$\Delta//D\Leftrightarrow f'(x_0)=-\frac{5}{8}\Leftrightarrow\frac{3}{2}x_0^2+2x_0-1=-\frac{5}{8}\Leftrightarrow\frac{3}{2}x_0^2+2x_0-\frac{3}{8}=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}\left(12x_0^2+16x-3\right)=0\Leftrightarrow 12x_0^2+16x-3=0$

$\Delta'=64+36=100$ $x'=\frac{-8-10}{12}=-\frac{18}{12}=\frac{-3}{2}$ et $x''=\frac{-8+10}{12}=\frac{1}{6}\notin\left]-\infty\ ,-1\right[\Rightarrow x_0=-\frac{3}{2}$

Exercice N°25 :1) $h(x)=\sqrt{|x|+3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|+3}-\sqrt{3}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x\left(\sqrt{|x|+3}+\sqrt{3}\right)}$$

si $x>0$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{|x|+3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $h'_d(0)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{|x|+3}+\sqrt{3}}=\frac{-1}{2\sqrt{3}}$, $h'_g(0)=\frac{-1}{2\sqrt{3}}$

$h'_g(0)\neq h'_d(0)$ Donc h n'est pas dérivable en 0. Donc la courbe de h admet deux demi tangente, une à droite de pente $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ et une à gauche de pente $\frac{-1}{2\sqrt{3}}$.

2) voir courbes

3) $2\sqrt{|x|+3}>x^2+3\Leftrightarrow\sqrt{|x|+3}>\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow h(x)>g(x)$.

C_g et C_f se coupent en deux points d'abscisse -1 et 1 ; $h(x) > g(x)$ donc $S=[-1,1]$

4) $K(x)=\frac{\sqrt{|x|+3}-2}{x^2-1}=\frac{|x|-1}{(x^2-1)\left(\sqrt{|x|+3}+2\right)}$

$\lim_{x\to 1}k(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)\ \left(\sqrt{|x|+3}+2\right)}=\frac{1}{8}$ et $\lim_{x\to -1}k(x)=\lim_{x\to -1}\frac{-1}{(x-1)\ \left(\sqrt{|x|+3}+2\right)}=\frac{1}{8}$

K admet des limites finies en 1 et -1 , alors K est prolongeable par continuité en 1 et -1.

5) a/ Pour $x\in[-1\ ,1]$, $f(x)=x(4E(x)+2)$; $f(x)=\begin{cases}-2x & si\ x\in[-1,0[\\ 2x & si\ x\in[0,1[\\ 6 & si\ x=1\end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}-2x=0$ $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}2x=0$ et par suite f est continue en 0 .

b/ **Continuité en -1 :** $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\sqrt{-x+3}=2$ Alors f est continue à gauche en -1.

$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}-2x=+2$ Alors f est continue à droite en 1et par suite f est continue en 1.

Continuité en 1 : * $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}2x=2$ alors f est continue à gauche en 1 .

* $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2g(x)+4x-8}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+3+4x-8}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+4x-5}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\ \ (x+5)}{x-1}=6$

Alors f n'est pas continue à droite en 1 .alors f est discontinue en 1

c/ **Dérivabilité en -1 :**

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\sqrt{3-x}-2}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{3-x-4}{(x+1)\left(\sqrt{3-x}+2\right)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{-(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{3-x}+2\right)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{-1}{\sqrt{3-x}+2}=\frac{-1}{4}$$

Donc f est dérivable à gauche en -1 et $f'_g(-1)=-\frac{1}{4}$

* $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-(2x+2)}{x+1}=-2$. Donc f est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1)=2$

Puisque $f'_g(-1)\neq f'_d(-1)$ alors f n'est pas dérivable en -1

***Dérivabilité en 1 :** f n'est pas continue en 1 et par suite f n'est pas dérivable en 1.*

Exercice N°26: $\begin{cases}f(x)=\sqrt{x^2-1}+x+2 & si\ x<-1\\ f(x)=x^2-3x-3 & si\ x\geq -1\end{cases}$

1) On a $x^2-1>0$ sur $]-\infty;-1[$ alors $x\mapsto\sqrt{x^2-1}+x+2$ est continue sur $]-\infty;-1[$

$x\mapsto x^2-3x-3$ est continue sur IR en particulier sur $[-1;+\infty[$

On a $f(-1)=1$; $\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\sqrt{x^2-1}+x+2=1$; $\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}x^2-3x-3=1$

On a $\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}f(x)=f(-1)$ donc f est continue en -1 et par suite f est continue sur IR.

2) $\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-3x-4}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}=\frac{(x+1)(x-4)}{x+1}=-5$ alors f est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1)=-5$

$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{\sqrt{x^2-1}+x-1}{x+1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$ alors f n'est pas dérivable à gauche en -1

3) $\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-1}+x+2=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x-2}{\sqrt{x^2-1}-x-2}=-2$ donc la droite d'équation $y=-2$ est une asymptote horizontale à ξ_f au voisinage de $-\infty$

4) a) $f(x)=x^2-3x-3$ sur $]-1;+\infty[$; f est une fonction polynôme donc dérivable en tout réel a.

b) On a $I(2;-3)$ $T: y=f'(2)(x-2)+f(2)=x-2-5=x-7$

c) $D: y=\frac{1}{3}x$; La tangente au point J est perpendiculaire à $D\Leftrightarrow\frac{1}{3}f'(a)=-1\Leftrightarrow f'(a)=-3$ signifie que $2a-3=-3\Rightarrow a=0$ donc $J(0;-3)$

d) $(IJ): y=-x-3$ une tangente est parallèle à (IJ) signifie que $f'(a)=-1\Leftrightarrow 2a-3=1\ \Leftrightarrow 2a=2$

$\Rightarrow a = 1$ D'où $K(1;-5)$

Exercice N°27 :

1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(a)(x-a)}{x-a}+\lim\limits_{x\to a}\frac{a\left[f(a)-f(x)\right]}{x-a}$

$=f(a)-\lim\limits_{x\to a}\frac{a(f(x)-f(a))}{x-a}f(a)-af'(a)$.

2) Soit $f(x)=(2x^2-6)^6$ et $a=2$; $f'(x)=24x(2x^2-6)^5$; $f(2)=64$; $af(x)=2(2x^2-6)^6$

Donc $\lim\limits_{x\to 2}\frac{64x-2(2x^2-6)^6}{x-2}=f(2)-2f'(2)=64-2\times48\times32=-3008$

3) $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$

$\Rightarrow\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)$

Exercice N° 28 :

1) a) $D_f=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

b) f est continue sur D_f donc elle est continue sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

b) $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=-\infty$ donc $\Delta: x=2$ est une asymptote verticale à ξ_f

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc $\Delta': y=0$ (axe des abscisses) est une asymptote horizontale à ξ_f au voisinage de $(+\infty)$

$D: y=\frac{3}{4}x$ est une asymptote oblique à ξ_f au voisinage de $(-\infty)$

3) b) T_g la demi-tangente à ξ_f à gauche au point d'abscisse 4. $\begin{cases}T_g: y=x\\ x\le4\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=f'(1)=0$; $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{f(x)+2}{x-4}=+\infty$

4) a) $f(]-\infty;2[)=]-\infty;+\infty[=IR$; $f([4;+\infty[)=[-2;0[$.

b) La courbe ξ_f de f coupe la droite d'équation $y=-\frac{3}{2}$ en deux points l'une appartient à $]-1;1[$ et l'autre appartient) $]2;+\infty[$ donc l(équation $f(x)=-\frac{3}{2}$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1;1[$ qui est α.

Exercice1 : 1) $f'(x)\ge0$ si et seulement si f est croissante d'après le graphique pour tout $x\in]-\infty,0]$ f est croissante et pour tout $x\in[2,+\infty[$ f est croissante d'où pour tout $x\in]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$.

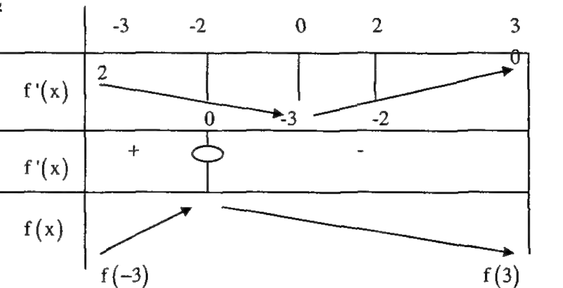
$f'(x)\ge0$ d'où $S=]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$

2) on a $f(1)=0$ donc $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$ or $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe de f au point d'abscisse 1 et d'après le graphique $\Delta=(AB)$ avec $A(1,0)$ et $B(0,3)$ donc $f'(1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{0-3}{1-0}=-3$ et par suite $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)}{h}=-3$

3)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$ ↗		2	↘	-2	↗	$+\infty$

Exercice2



1) la réponse est a) ; en effet f est strictement croissante sur [-3 , -2,5] Donc f(-3) < f(-2,5).
2) f'(-2) = 0 et f'(3) = 0 donc ζ_f admet deux tangentes horizontales qui sont parallèles à Δ : y = -1 donc la réponse est a) .
3) D'après le tableau de variation la droite y = α coupe la courbe de f en un seul point donc la réponse est a). 4) c) ; 5) c) ; ;6)b)

Exercice n°3 : 1)

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$ ↗		4	↘	0	↗	$+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

3) a) $D_g=\mathbb{R}\setminus\{0;3\}=D$

b) f est dérivable et non nulle sur D alors g est dérivable sur D et pour tout $x\in D$, on a : $g'(x)=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$. c)

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
g'(x)		-	‖	-	0	+	‖	-	
g(x)	0 ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{4}$	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

Exercice N° 4 : 1) $f(3)=1; f'(3)=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à ζ_f au voisinage de $(+\infty)$

3) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=0$; 4) a) $f'_d(2)=\frac{3-0}{3-2}=3$

b) $T: y=f'_d(2)(x-2)+f(2)$ signifie que $T: y=3(x-2)+0$

équivaut $T: y=3x-6$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
f(x)	$+\infty$ ↘	0 ↗	1 ↘	0

5) $\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)}{x-2}=-\infty$; f n'est pas dérivable à gauche en 2. 6)voir tableau

Exercice N°5 : 1) f(x) = 2x -1, f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR et on a f'(x) = 2

2) $f(x)=2x^2-3x+4$; f est dérivable sur IR et $f'(x)=2\times2x-3=4x-3$.

3) $f(x)=(3x-4)^3$; On a $x\mapsto 3x-4$ est dérivable sur IR donc $x\mapsto(3x-4)^3$ est dérivable sur IR et on a : $f'(x)=3\times3(3x-4)^2=9(3x-4)^2$

4) $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{2x+5}$, $D_f=IR/\left\{\frac{-5}{2}\right\}$, f est une fonction rationnelle donc dérivable sur $IR/\left\{\frac{-5}{2}\right\}$

$$f'(x)=\frac{(4x-1)(2x+5)-2(2x^2-x-1)}{(2x+5)^2}=\frac{4x^2+20x-3}{(2x+5)^2}$$

5) $f(x)=\sqrt{2x+1}$, $D_f=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$,Soit L(x) = 2x + 1 dérivable sur IR

Pour tout $x\in\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, $L(x)>0$ d'où $f(x)=\sqrt{L(x)}$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

$$f'(x)=\frac{L'(x)}{2\sqrt{L(x)}}=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

6) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$, $x^2-x-6=0$, $\Delta=25$, $x'=-2$, $x''=3$; $D_f=]-\infty,-2]\cup[3,+\infty[$

Soit $L(x)=x^2-x-6$ dérivable sur IR Pour tout $x\in]-\infty,-2[\cup]3,+\infty[$ $L(x)>0$;donc f est dérivable au $]-\infty,-2[\cup]3,+\infty[$ $f'(x)=\frac{L'(x)}{2\sqrt{L(x)}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-6}}$

7/ $f(x)=\frac{1}{3x-7}$, $D_f=IR/\left\{\frac{7}{3}\right\}$, f est dérivable sur $IR/\left\{\frac{7}{3}\right\}$, $f'(x)\ \frac{-3}{(3x-7)^2}$

8) $f(x)=(x-1)^3(2x-3)^4$

$x\mapsto(x-1)^3$ Dérivable sur IR

$x\mapsto(2x-3)^4$ Dérivable sur IR

f est dérivable sur IR

$f'(x)=3(x-1)^2(2x-3)^4+(x-1)^3(4\times2(2x-3)^3$

$=(x-1)^2(2x-3)^3(3(2x-3)+8(x-1))=(x-1)^2(2x-3)^3(14x-17)$

9/ $f(x)=(5x+1)^{-4}=\frac{1}{(5x+1)^4}$, f est dérivable sur $IR/\left\{-\frac{1}{5}\right\}$; $f'(x)=-4\times5(5x+1)^{-5}=-20(5x+1)^{-5}$

10) $f(x)=2x+3+\frac{5}{x}$; $x\mapsto 2x+3$ *dérivable sur IR* , $x\mapsto\frac{5}{x}$ *dérivable sur IR** , f dérivable sur IR*

$f'(x)=2+\left(\frac{-5}{x^2}\right)=2-\frac{5}{x^2}$

Exercice N°6 :

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … $+\infty$
$\lvert x^2+x\rvert$	x^2+x	$-x^2-x$	x^2+x
$\lvert x\rvert$	$-x$	$-x$	x
f(x)	$\frac{x^2+x+1}{-x+1}$	$\frac{-x^2-x+1}{-x+1}$	$\frac{x^2+x+1}{x+1}$

1) $f(x)=\frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x+1}{-x+1} & si\ x\in]-\infty,-1]\\ \frac{-x^2-x+1}{-x+1} & si\ x\in[-1,0]\\ \frac{x^2+x+1}{x+1} & si\ x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

<u>Dérivabilité de f en 0 :</u> *si* $x\in]0,+\infty[$ On pose $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{x^2+x+1}{x+1}-1}{x}=\frac{x^2}{x(x+1)}=\frac{x}{x+1}$

$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=0$; *si* $x\in]-1,0[$: $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{-x^2-x+1}{-x+1}-1}{x}=\frac{x}{x-1}$, $\lim_{x\to0^-}\varphi(x)=0$

Alors $\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^-}\varphi(x)=0$, donc f est dérivable en 0 et f'(0) = 0 .

<u>Dérivabilité de f en -1</u> *si* $x\in]-\infty,-1[$ on a

$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{\frac{x^2+x+1}{-x+1}-\frac{1}{2}}{x+1}=\frac{2x+1}{2(-x+1)}$, $\lim_{x\to(-1)^-}\varphi(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2x+1}{2(-x+1)}=-\frac{1}{4}$

D'ou f est dérivable à gauche en -1 et $f'_g(-1)=-\frac{1}{4}$

si $x\in]-1,0[$ $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{\frac{-x^2-x+1}{-x+1}-\frac{1}{2}}{x+1}=\frac{-2x+1}{2(-x+1)}$, $\lim_{x\to(-1)^+}\varphi(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-2x+1}{2(-x+1)}=\frac{3}{4}$

D'où f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1)=\frac{3}{4}$ Comme $f'_d(-1)\neq f'_g(-1)$ alors f n'est dérivable en -1 .

2) f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ et on a : $f'(x)=\begin{cases}\frac{-x^2+2x+2}{(-x+1)^2} & si\ x\in]-\infty,-1[\\ \frac{x^2-2x}{(-x+1)^2} & si\ x\in]-1,0]\\ \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} & si\ x\in[0,+\infty[\end{cases}$

Exercice N°7 : 1) $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$; $a=4$. On pose $u(x)=x^2$, $D_u=IR$ et $u(4)=16$

Pour tout $x\in IR$ u est dérivable et $u'(x)=2x$, $\lim_{x\to4}f(x)=\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{u(x)-u(4)}{x-4}=u'(4)=8$

2) $f(x)=\frac{x^2\sqrt{x}-1}{x-1}$, $a=1$, Soit $u(x)=x^2\sqrt{x}$, $D_u=IR_+$ et $u(1)=1$

$x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur IR_+^* ; $x\mapsto x^2$ est dérivable sur IRAinsi u est dérivable sur $IR_+^*\cap IR=IR_+^*$

$u'(x)=(x^2)'\sqrt{x}+x^2(\sqrt{x})' = 2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{4x^2}{2\sqrt{x}}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{u(x)-u(1)}{x-1}=u'(1)=\frac{5}{2}$

3) $f(x)=\frac{\frac{1}{x+4}-1}{x+3}$, $a=-3$, Soit $V(x)=\frac{1}{x+4}$, $D_x=IR \;/\; \{-4\}$, $V(-3)=1$

V est dérivable sur $IR/\{-4\}$ et $V'(x)=\frac{-1}{(x+4)^2}$

$\lim\limits_{x\to-3} f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\frac{\frac{1}{x+4}-1}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}\frac{V(x)-V(-3)}{x+3}=V'(-3)=-1$

4) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}$, $a=0$, On pose $u(x)=\sqrt{x^2+x+1}$, $V(x)=\sqrt{x^2+1}$

$D_u=D_V=IR$, $f(0)=g(0)=1$ on pose $S(x)=x^2+x+1$ et $R(x)=x^2+1$

S et R sont deux fonctions polynômes donc dérivables sur IR : $S'(x)=2x+1$ et $R'(x)=2x$

Pour tout $x\in IR$, $S(x)>0$ *et* $R(x)>0$ Donc $u=\sqrt{S}$ et $v=\sqrt{R}$ sont dérivables sur IR.

$u'(x)=\frac{S'(x)}{2\sqrt{S(x)}}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$, $u'(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $v'(x)=\frac{R'(x)}{2\sqrt{R(x)}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

$V'(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{\sqrt{x^2+x-1}-1}{x-1}}{\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{u(x)-1}{x-1}}{\frac{V(x)-1}{x-1}}=\frac{u'(1)}{V'(1)}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

Exercice N° 8 : 1) a) Vrai ; b) Vrai ; c) Faux

2) a) $f(x)=0$; $S_{IR}=\{-1;3\}$; b) $f(x)<0$; $S_{IR}=]-\infty;-1[$; c) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=3$

3)

x	$-\infty$	0	1		3	$+\infty$
f(x)	$-\infty$ ↗	2	↗ 3	↘	0	↗ $+\infty$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de f(x)		$-$	0	$+$	

Exercice n°9 : 1) $f'(-2)=2$ et $f'(-1)=0$. 2)a/ -i- et –ii- b/ $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)+1}{x-1}=-4$ c/ $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)+1}{x-1}=0$.

3) a- g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x)=2ax+b$.

b) L'équation de la tangente à ζ_f au point d'abscisse 0 est : $y=2x+1$ donc $g'(0)=2$ et $g(0)=1$ alors $b=2$ et $c=1$. D'autre part $g'(-1)=f'(-1)=0$ alors $-2a+2=0$ donc $a=1$. Ainsi : $a=1$, $b=2$ et $c=1$.

4) a) $x\mapsto x^2+x$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ donc h est continue sur $\mathbb{R}_+$. $x\mapsto\frac{x}{x-1}$ est rationnelle définie pour $x\neq1$ continue sur $]-\infty,0[$. $\lim\limits_{0^+} h=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x^2+x}=0=h(0)$. $\lim\limits_{0^-} h=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x}{x-1}=0=h(0)$ donc h est continue en 0 et par suite h est continue sur $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x-1}=-1$ alors h est dérivable à gauche en 0 et $h'_g(0)=-1$.

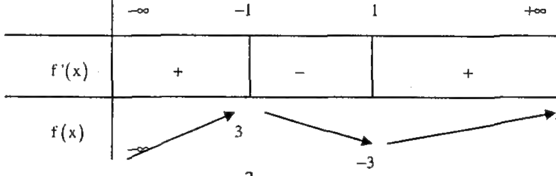
$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}=+\infty$ alors h n'est pas dérivable à droite en 0. ζ_h admet au point O deux demi tangentes : $T_g\begin{cases}y=-x\\x\le0\end{cases}$ et $T_d\begin{cases}x=0\\y\ge0\end{cases}$.

c) $x\mapsto x^2+x$ est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0, h'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

$x\mapsto\frac{x}{x-1}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et pour $x<0, h'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$.

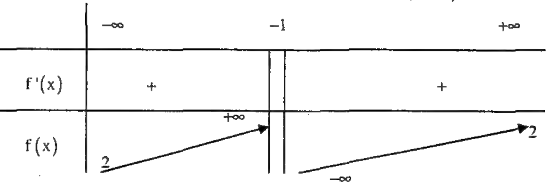
Exercice N° 10 : 1) $f(x)=x^3-3x+1$, f est dérivable sur IR et $f'(x)=3x^2-3$

3 est un maximum relatif et
-3 est une minimum relatif



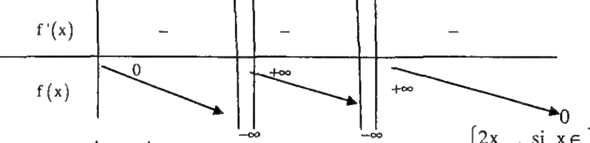
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+		$-$		+	
f(x)	$-\infty$	↗	3	↘	-3	↗	$+\infty$

2) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$, f est dérivable sur $IR/\{-1\}$ et $f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$



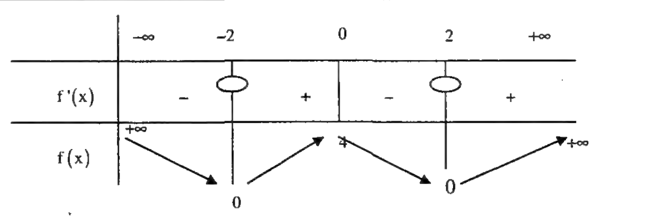
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'(x)		+	‖	+	
f(x)	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

3) $f(x)=\frac{2x-3}{3x^2-4x}$; f est dérivable sur $IR/\left\{0;\frac{4}{3}\right\}$ et $f'(x)=\frac{6(-2x^2+2x-2)}{(3x^2-4x)^2}$

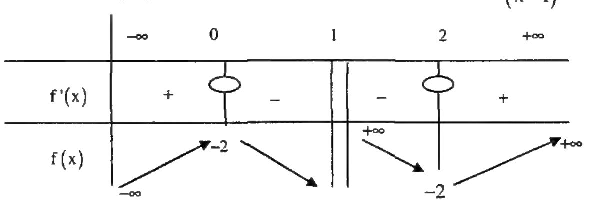


x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
f(x)	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

4) $f(x)=|x^2-4|$, f est dérivable sur IR et on a $f'(x)=\begin{cases}2x & \text{, si } x\in]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[\\-2x & \text{; si } x\in[-2;2]\end{cases}$



5) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$, f est dérivable sur $IR/\{1\}$ et $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$



6) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$; $f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

Il faut que $x^2-4x+2\geq 0$; $x\in\,]-\infty,1[\cup]3;+\infty[$ et $x\to x^2-4x+2$ dérivable sur $]-\infty,1[\cup]3;+\infty[$ et $x^2-4x+2>0 \Rightarrow x\to\sqrt{x^2-4x+2}$ dérivable sur $]-\infty,1[\cup]3;+\infty[$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-3}{(x-1)\left(x^2+4x+3\right)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$$

	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f '(x)		-		(hachuré)		+	
f(x)	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

Exercice N°11 : $f(x)=\dfrac{x^2+bx+c}{x^2-3x+2}$; Il faut que $x^2-3x+2\neq 0$; $a+b+c=1-3+2=0$

donc x' = 1 , x'' = 2

f est définie dérivable sur $IR/\{1,2\}$

$$f'(x)=\frac{(2x+b)(x^2-3x+2)-(x^2+bx+c)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}=\frac{(-3-b)x^2+(6-2c)x+2b+3c}{(x^2-bx+2)^2}$$

f admet un extremum égal à 2 en 0 ; f(0) = 2 $\Leftrightarrow \dfrac{c}{2}=2 \Leftrightarrow c=4$

d'autre part 0 est une racine de l'équation (-3 – b) x² + (6 – 2c) x + 2b + 3c car f '(0) = 0

ce qui donne que 2b + 3c = 0 $\Leftrightarrow b=-\dfrac{3}{2}c \Leftrightarrow b=-6$

Exercice N°12 : $f(x)=\dfrac{4(a-1)x+2a+2}{4x^2-1}$; $a\in IR$; $D_f=IR/\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$

f une fonction rationnelle donc dérivable sur $IR/\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$

$$f'(x)=\frac{4(a-1)(4x^2-1)-8x(4(a-1)x+2a+2)}{(4x^2-1)^2}=\frac{-16(a-1)x^2-4(a-1)-16ax-16x}{(4x^2-1)^2}$$

$$=\frac{-16(a-1)x^2-(16a+16)x-4(a-1)}{(4x^2-1)^2}=\frac{-16(a-1)x^2-16(a+1)x-4(a-1)}{(4x^2-1)^2}$$

f'(x) = 0 $\Leftrightarrow$ -16 (a – 1) x² - 16 (a + 1) x – 4 (a – 1) = 0

a/ f admet un seul extremum $\Leftrightarrow \Delta = 16^2(a+1)^2-4(-16)(a-1)(-4)(a-1)=0 \Leftrightarrow \Delta=16^2\times 4a=0\Leftrightarrow a=0$

b/ f n'admet pas d'extremum $\Leftrightarrow$ équivaut à : $\Delta<0 \Leftrightarrow a<0$

c/ f admet un maximum et un minimum équivaut à $\Delta>0 \Leftrightarrow$ équivaut à : a > 0

Exercice N°13 : 1) P(x) = 3x² - 12 x + 17, P est dérivable sur IR et on a : P'(x) = 6 x – 12

P'(x) = 0 $\Leftrightarrow$ x – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2

x	$-\infty$		2		$+\infty$
P'(x)		−	0	+	
P(x)	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

D'après le tableau de variation P admet 5 comme minimum absolu sur ℝ donc $P(x)\rangle 0\ \forall x\in\mathbb{R}$:

2) a/ f(x) = x³ – 6 x² + 17x + 4

f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR et f '(x) = 3x² - 12 x + 17

On remarque que f'(x) = P(x) > 0 Ce qui implique que f est strictement croissante sur IR .

b/

x	$-\infty$		$+\infty$
f '(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

Exercice14 : 1/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1;\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty;\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x-5\right]=0$

2/a) $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0, f'(3)=-\dfrac{1}{2}$

b) $f(3{,}004)=f(3+004)\simeq f(3)+0{,}004f'(3)\simeq 2{,}5+0.04\times-\dfrac{1}{2}\simeq 2{,}48$

3/a) f n'est pas dérivable a gauche en -3 car ζ_f admet une demi tangente verticale à gauche en -3 et

$\lim_{x\to(-3)^-} \frac{f(x)-5,5}{x+3} = +\infty$, b) $\lim_{x\to(-3)^+} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \frac{1}{4}$.

4) $x\in[0,+\infty[$ $on a : x \to f(x)+\frac{3}{2}$ continue sur $[0,+\infty[$ et $f(x)+\frac{3}{2}>0, \forall x\in[0,+\infty[$ donc g est dérivable sur $[0,+\infty[$ en particulier en 3 $g'(a)=\frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)+\frac{3}{2}}}\ \forall a\in[0,+\infty[$,

$$g'(3)=\frac{f'(3)}{2\sqrt{f(3)+\frac{3}{2}}}=-\frac{\frac{-1}{2}}{2\sqrt{2,5+1,5}}=\frac{-1}{4\sqrt{4}}=-\frac{1}{8}$$

b) $T: y=g'(3)(x-3)+g(3), T: y=-\frac{1}{8}(x-3)+2=-\frac{1}{8}x+\frac{19}{8}$

Exercice N° 15 :

1) $D_f = IR/\{-3\}, D_{f'} = IR/\{-3\}$

x	$-\infty$		-4		-3		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	-4 ↗		-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-5	↗	1

2) les droites d'équations y = -4 , y = 1 et x = -3 sont les asymptotes à la courbe de f

3) Aux points d'abscisses -4 et 2 la courbe de f admet deux tangentes horizontales d'équations. y = -1 et y = -5

4) f' s'annule et change de signe en -4 et 2 donc : f(-4) = -1 est un maximum local f(2) = -5 est un minimum local

Exercice N° 16 : $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$; $(a;b)\in IR^2$

1) $T: y=7x-11$ est une tangente au point d'abscisse 2; $f'(2)=7$; $y=7(x-2)+3$ donc $f(2)=3$

$\begin{cases}4a+2b+9=3\\4a+b+12=7\end{cases}$ signifie que $\begin{cases}4a+2b=-6\\4a+b=-5\end{cases}$ signifie

que $\begin{cases}4a+2b=-6 \quad (1)\\4a=-5-b\end{cases}$; (1) signifie que $-5-b+2b=-6$ signifie que $b-5=-6$ signifie que $b=-1$; si $b=-1$ alors $a=-1$

2) $a=-1$ et $b=-1$

a) $f(x)=x^3-x^2-x+1$, f est dérivable sur IR en tant que fonction polynôme. $\forall x\in IR$; On a $f'(x)=3x^2-2x-1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{16}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$

b) $f'(x)=0$ signifie que $3x^2-2x-1=0$; $a+b+c=3+(-2)+(-1)=0$ donc $x'=1$ et $x''=-\frac{1}{3}$.

2) $\frac{16}{27}$ est un maximum relatif au point d'abscisse $-\frac{1}{3}$. 0 est un minimum relatif au point d'abscisse 0.

3) a) Soit le polynôme $P(x)=x^3-x^2-8x+12$; $P(2)=8-4-16+12=20-20=0$ donc

$x^3-x^2-8x+12=(x-2)(x^2+bx+c)=x^3+bx^2+cx-2x^2-2bx-2c=x^3+(b-2)x^2+(c-2b)x-2c$

Par identification $\begin{cases}b-2=-1\\2c=-12\\c-2b=-8\end{cases}$ signifie que $\begin{cases}b=1\\c=-6\end{cases}$ donc $x^3-x^2-8x+12=(x-2)(x^2+x-6)$

Soit $x^2+x-6=0$; $\Delta=25$; $x'=\frac{-1-5}{2}=-3$ et $x''=\frac{-1+5}{2}=2$ d'où $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ et par suite

$x^3-6x^2-8x+12=(x-2)(x-2)(x+3)=(x-2)^2(x+3)$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f(x) − y		−	0	+	
Position		T / ζ_f	Intersection	ζ_f / T	

b) $f(x)-y=x^3-x^2-x+1-7x+11=x^3-x^2-8x+12=(x-2)^2(x+3)$

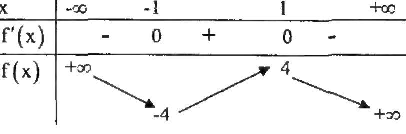
4) $g(x)=\begin{cases}x^3-x^2-x+1 & \text{si } x\geq 0\\ \sqrt{x^2+1} & \text{si } x<0\end{cases}$ $\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3-x^2-x}{x}=\lim_{x\to0^+}x^2-x-1=-1$

$\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=0$ donc g n'est pas dérivable en 0.

Au point d'abscisse 0 la courbe de g admet deux demi tangentes $T_{x>0}: y=-x+1$ et $T_{x<0}: y=1$ (Point anguleux)

Exercice17 :: 1/ on suppose que (ζ_2) est la courbe de f ⇒ f est strictement croissante sur $]-\infty,0]$ $\Rightarrow f'(x)\geq 0 \forall x\in]-\infty,0]$ $\Rightarrow \zeta_1$ est au dessus de $y=0$ $\forall x\in]-\infty,0]$ ceci est impossible donc (ζ_2) est la courbe de f', 2/ Tableau de variation :

Exercice N°18 : $f(x) = x^2$; f est dérivable sur IR et



x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	$+\infty$	↘	-4	↗	4	↘	$+\infty$

$f'(x) = 2x$ donc $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=2\left(\frac{a+b}{2}\right)=a+b$ signifie

$(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=(b-a)(a+b)=b^2-a^2$

$=f(b)-f(a)$ Signifie

$f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Pour $a\neq b$: on a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ est la pente de la tangente à courbe de f au point I.

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ La pente de la droite (AB) .Puisque $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ alors pour tous points A et B distincts de la courbe de f , la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{x_A+x_B}{2}$ est parallèle à la droite (AB).

Exercice N° 19 : $f(x)=\frac{5-x^2}{x-3}$; $D_f = IR\setminus\{3\}$

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}-\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} -\frac{4}{0^+}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} -\frac{4}{0^-}=+\infty$

2) a) f est une fonction rationnelle donc dérivable sur $IR\setminus\{3\}$ et $\forall x\neq 3$, on a :

$f'(x)=\frac{-2x(x-3)-1(5-x^2)}{(x-3)^2}=\frac{-2x^2+6x-5+x^2}{(x-3)^2}=\frac{-x^2+6x-5}{(x-3)^2}$

b) $f'(x)=0$ signifie que $-x^2+6x-5=0$; $a+b+c=-1+6-5=0$ donc $x'=1$ et $x''=5$

c) -2 est un minimum local et -10 est un maximum local.

3) a) $T: y=f'(0)x+f(0)=-\frac{5}{9}x+\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{5}{9}x-\frac{5}{3}$

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	‖	+	0	-	
f(x)	$+\infty$	↘	-2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-10	↘	$-\infty$

b) $\Delta: y=-\frac{5}{9}x$;

$f'(x_0)=-\frac{5}{9}\Leftrightarrow\frac{-x_0^2+6x_0-5}{(x_0-3)^2}=-\frac{5}{9}$

$\Leftrightarrow 9x_0^2-54x_0+45=5(x_0^2-6x_0+9)$

$\Leftrightarrow -9x_0^2+54x_0-45=5x_0^2-30x_0+45\Leftrightarrow 14x_0^2-84x_0+90=0\Leftrightarrow 7x_0^2-42x_0+45=0$;

$\Delta'=21^2-7\times 45=441-315=126$; $x_0'=\frac{-21-\sqrt{126}}{7}$ et $x_0''=\frac{-21+\sqrt{126}}{7}$

Exercice 20 : 1)a) f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ (fonction rationnelle) et on a $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-2)-(ax^2+bx+2)}{(x-2)^2}=\frac{2ax^2-4ax+bx-2b-ax^2-bx-2}{(x-2)^2}=\frac{ax^2-4ax-2b-2}{(x-2)^2}$.

b) $\begin{cases} f'(4)=0 \text{ or } f'(4)=\frac{16a-16a-2b-2}{(4-2)^2}=\frac{-b-1}{2} \\ f(4)=7 \text{ or } f(4)=\frac{16a+4b+2}{4-2}=8a+2b+1=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-b-1}{2}=0 \Rightarrow \boxed{b=-1}\\ 8a+2b+1=7\Rightarrow\boxed{a=1}\end{cases}$

2)a) $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-2}$; $f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
f(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	7	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$; $f(0)=1$; $f(4)=7$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

b) f admet un maximum relatif en 0 égal à -1 et un minimum relatif en 4 égal à 7

3) $T_g // D: y=-3x+5$; $f'(a)=-3$

$\frac{a^2-4a}{(a-2)^2}=-3\Rightarrow -3(a^2-4a+4)=a^2-4a\Rightarrow 4a^2-16a+12=0$; $a=1$; $a=3$

$T_1: y=f'(1)(x-1)+f(1)$; $f'(1)=-3$; $f(1)=-2\Rightarrow T_1: y=-3(x-1)-2\Rightarrow\boxed{T_1: y=-3x+1}$

$T_3: y=f'(3)(x-3)+f(3)$; $f'(3)=-3$; $f(3)=8\Rightarrow T_3: y=-3(x-3)+8\Rightarrow\boxed{T_3: y=-3x+17}$

4)a) $\lim\limits_{x\to4^+} g(x)=\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=7$; $\lim\limits_{x\to4^-} g(x)=\lim\limits_{x\to4^-}\sqrt{4-x}+2x-1=7$; $\lim\limits_{x\to4^-} g(x)=\lim\limits_{x\to4^+} g(x)=7$ donc g est contenue en 4

b) $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=0$ donc g est dérivable à droite en 4 et on a $g_d'(4)=0$

$\lim\limits_{x\to4^-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4^-}\frac{\sqrt{4-x}+2x-1-7}{x-4}=\lim\limits_{x\to4^-}\frac{\sqrt{4-x}}{-(4-x)}+\frac{2(x-4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4^-}\frac{\sqrt{4-x}}{-\sqrt{4-x}\sqrt{4-x}}+2$

$=\lim\limits_{x\to4^-}\frac{1}{-\sqrt{4-x}}+2=-\infty$ donc g n'est pas dérivable à gauche en 4

c)i) $\boxed{\text{Faux}}$ car g n'est pas dérivable à gauche en 4 ; ii) $\boxed{\text{Vrai}}$ car $g'_d(4)=0$

iii) $\boxed{\text{Faux}}$ car $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}=-\infty$ ζ_g admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

Exercice N°21 : $f(x)=\sqrt{x^2-2x}+x$; $x^2-2x\geq 0$ Donc $D_f=]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$

$x\mapsto x$ est dérivable sur IR ; $x\mapsto x^2-2x$ dérivable sur IR Pour tout $x\in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$, $x^2-2x>0$ D'où $f(x)=x+\sqrt{x^2-2x}$ est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ $f'(x)=1+\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

2) pour tout $x\in]-\infty,0[$; On a $(x-1)^2>x^2-2x$ et $x^2-2x>0$

$\sqrt{(x-1)^2}>\sqrt{x^2-2x}\Leftrightarrow|x-1|>\sqrt{x^2-2x}\Leftrightarrow 1-x>\sqrt{x^2-2x}$ car $x<0$

et par suite pour tout $x<0$ on a $\sqrt{x^2-2x}<1-x$

3) si $x\in]-\infty,0[$ on a $\sqrt{x^2-2x}<1-x$

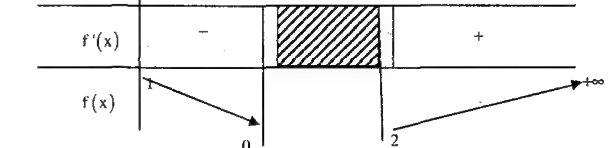
$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}>\frac{1}{1-x}\Rightarrow\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x}}>1\Rightarrow\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}<-1\Rightarrow 1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}<0$

Donc pour tout $x\in]-\infty,0[$ on a $f'(x)<0$

si $x\in]2,+\infty[$; on a $x-1>0$ donc $1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}>0$, donc pour tout $x\in]2,+\infty[$ on a $f'(x)>0$

4) Tableau de variation

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x=+\infty$ D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)}{x-\sqrt{x^2-2x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-\sqrt{x^2-2x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=1$

Exercice N° 22 **:** * f est croissante sur $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[\Leftrightarrow f'(x)>0\quad\forall x\in\ ]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ donc les branches de la courbe de f sur $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$ sont situées au dessus de l'axe (O , $\vec{i}$).
* f est décroissante sur $[-1,1]\Leftrightarrow f'(x)<0$ *sur* $[-1,1]\Rightarrow$ la branche de la courbe de f' sur $[-1,1]$ est situé au dessous de l'axe (O , $\vec{i}$).Et par suite C_1 et la courbe de f' .

Exercice N°23: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{2x} & \text{si } 0<x\le 2\\ f(x)=\sqrt{x^2-2x} & \text{si } x>2\end{cases}$

1) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x^2-5x+2}{2x}=0=f(0)$; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{x^2-2x}=0=f(0)$ On a

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=f(0)$ donc f est continue en 2

b)

$\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x^2-5x+2}{2x(x-2)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2x(x-2)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x}=\dfrac{3}{4}$

f est dérivable à gauche en 2 et on a : $f'_g(2)=\dfrac{3}{4}$.

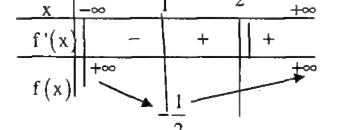
$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x(x-2)}}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$

$=\lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}=+\infty$ f n'est pas dérivable à droite en 2 et par suite f n'est pas dérivable en 2.La courbe de f admet une demi-tangente verticale en son point d'abscisse 2.

c) voir figure 2) a) f est dérivable sur $]0;+\infty[\setminus\{2\}$

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(4x-5)2x-2(2x^2-5x+2)}{4x^2} & \text{si } 0<x\le2\\ \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} & \text{si } x>2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{8x^2-10x-4x^2+10x-4}{4x^2} & \text{si } 0<x\le2\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} & \text{si } x>2\end{cases}$

$=\begin{cases}\dfrac{4x^2-4}{4x^2} & \text{si } 0<x\le2\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} & \text{si } x>2\end{cases}$



b) si $x>2$ On a $f'(x)>0$; Sur $]0;2]$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^2-4=0$

; ; $x'=-1<0\notin]0;2]$ et $x''=1\in]0;2]$ et par suite $f'(x)<0\ \forall x\in]0;2]$

3) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-2x}-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x}+x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-2x}+x-1}=0$

Alors la droite D d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à ζ_f au voisinage de $(+\infty)$.

b) Position de ζ_f et D sur $]2;+\infty[$: $f(x)-y=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-2x}+x-1}<0$ Alors ζ_f est au dessous de D sur $]2;+\infty[$.

4) $\varphi(x)=2x^3-2x^2+5x-2$; $x\in[0;2]$ a) φ est une fonction polynôme , elle est dérivable sur IR en particulier sur $[0;2]$; $\forall x\in[0;2]$ on a $\varphi'(x)=6x^2-4x+5$;

$\varphi'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-4x+5=0\quad \Delta=16-120=-104<0$ alors $\forall x\in[0;2]$ on a $\varphi'(x)>0$.

x	0		2
$\varphi'(x)$		+	
$\varphi(x)$	−2	↗	16

b) $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{2x}=x^2\Leftrightarrow 2x^3-2x^2+5x-2=0$

$\Leftrightarrow\varphi(x)=0$ Puisque φ est strictement croissante sur $[0;2]$ de -2 vers 16 alors l'équation $f(x)=x^2$ admet une unique solution $\alpha\in[0;2]$;

$\varphi(0.4)=2\times(0.4)^3-2\times(0.4)^2+5\times0.4-2=0.128-0.32+2-2=-0.192<0$

$\varphi(0.6)=2\times(0.6)^3-2\times(0.6)^2+5\times0.6-2=0.712>0$: $0\in\left[\varphi(0.4);\varphi(0.6)\right]$ Donc $\alpha\in[0.4;0.6]$.

Exercice N° 24 : :1) $g(x)=2x^3+3x^2+1$

a) g est dérivable sur IR et $\forall x\in$ IR on a :

$g'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

b) $[-1;+\infty[=[-1;0]\cup[0;+\infty[$; Sur $[-1;0]$ on a $g(x)\in[2;1]$; sur $[0;+\infty[$ on a $g(x)\ge1$ d'où $\forall x\in[-1;+\infty[$ on a $g(x)>0$.

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x}{x+1} ; x\in]-1;1]\\ 1-\sqrt{x^2-1} ; x\in]1;+\infty[\end{cases}$; $D_f=]-1;+\infty[$

a) $f(1)=1$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3+x}{x+1}=1=f(1)$ Donc f est continue à gauche en 1.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}1-\sqrt{x^2-1}=1=f(1)$ Donc f est continue à droite en 1.Donc f est continue en 1.

b) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{x^3+x}{x+1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$ donc $f'_d(1)=\dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-\sqrt{x^2-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-\sqrt{x-1}.\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}.\sqrt{x+1}}=-\infty$

On a $f'_d(x)\ne f'_g(x)$ alors f n'est pas dérivable en 1 et la courbe de f admet deux demi tangentes au point d'abscisse 1.

c) f est dérivable sur $]-1;+\infty[\setminus\{1\}$

Sur $]-1;1[$; $f'(x)=\dfrac{(3x^2+1)(x+1)-(x^3+x)}{(x+1)^2}=\dfrac{3x^3+3x^2+x+1-x^3-x}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^3+3x^2+1}{(x+1)^3}$

Sur $]1;+\infty[$; $f'(x)=-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{(x+1)^3} \text{ si } x\in]-1;1] \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \text{ si } x\in]1;+\infty[\end{cases}$$

x	−1		1		+∞
f '(x)		+	‖	+	
f (x)	−∞	↗			+∞

3) Γ la restriction de ζ_f à $]-1;1]$; $f'(x)=1$ signifie que $2x^3+3x^2+1=x^3+3x^2+3x+1 \Leftrightarrow x^3-3x=0$ signifie $x=0$ ou $x=\sqrt{3}$ on a donc deux tangentes aux points d'abscisses 0 et 3 et parallèles à la droite $D: y=x+1$.

Exercice N°25 : 1) $f(x)=\dfrac{1-x^6}{1-x}$, $D_f=IR/\{1\}$, f est une fonction rationnelle donc dérivable sur $IR/\{1\}$

Pour $x\neq 1$; $f'(x)=\dfrac{-6x^5(1-x)+(1-x^6)}{(1-x)^2}=\dfrac{-6x^5+6x^6+1-x^6}{(1-x)^2}=\dfrac{5x^6-6x^5+1}{(1-x)^2}$

2) on a $1-x^6=(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$, donc pour $x\neq 1$; $f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$

$f'(x)=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$

Et par suite sur tout $x\neq 1$ on a : $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4=\dfrac{5x^6-6x^5+1}{(1-x)^2}$

3) Soit la fonction définie sur $IR/\{1\}$ par $h(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $n\in IN^*$, h est dérivable sur $IR/\{1\}$ et on a :

$$h'(x)=\frac{-(x+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

D'autre part on a pour tout $x\in IR/\{1\}$ et pour tout $x\in IN^*$

$$h(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots\dots+x^n \Rightarrow h'(x)=1+2x+3x^2+\dots\dots+nx^{n-1}$$

Conclusion : Pour tout $x\neq 1$ et pour tout $x\in IN^*$ on a : $1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}=\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

Exercice N°26: f est dérivable sur $IR/\{1\}$ et $f'(x)=a-\dfrac{c}{(x-1)^2}$

On a : $f'(0)=f'(2)=a-c=0$, $f(0)=0 \Rightarrow b-c=0$, $f(2)=4 \Rightarrow 2a+b+c=4$

On obtient donc :

$$\begin{cases}a-c=0\\ b-c=0\\ 2a+b+c=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=c\\ b=c\\ 2a+a+a=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=1\end{cases} \Rightarrow f(x)=x+1+\frac{1}{x-1} \ , x\neq 1$$

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1+\dfrac{1}{x-1})=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(x+1+\dfrac{1}{x-1}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

x	−∞		0		1		2		+∞
f '(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f (x)	−∞	↗	0	↘ −∞	‖	+∞ ↘	4	↗	+∞

3) f(0) = 0 est maximum relatif de f ; f(2) = 4 est minimum relatif de f .

Exercice N°27 : Soit $I=B*C$, on a $IA^2+IC^2=a^2 \Leftrightarrow IA^2+\dfrac{a^2}{4}=a^2 \Leftrightarrow IA^2=\dfrac{3a^2}{4} \Leftrightarrow IA=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

On désigne par A l'aire de triangle ABC, donc $A=a.\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

D'autre part $A=2.\dfrac{QM\times x}{2}+\dfrac{PQ(IA-QM)}{2}+QM.MN=QMx+(a-2x)(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-QM)\dfrac{1}{2}+(a-2x)QM$

$=QMx+\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2-QMa-\sqrt{3}ax+2QMx\right]\dfrac{1}{2}+(a-2x)QM$

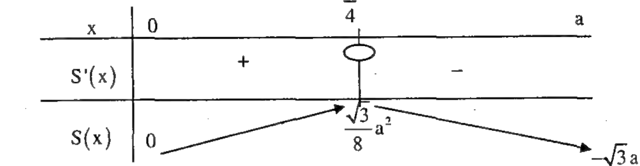
$=QMx+\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2-\dfrac{QM}{2}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}ax+QMx+(a-2x)QM=2QMx-QM\dfrac{a}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}ax+a \ \ QM-2xQM$

$=QM\dfrac{a}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}ax=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Leftrightarrow QM\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}ax \Leftrightarrow QM=\sqrt{3}x$

On désigne par S l'aire du rectangle MNPQ ; $S=QM\times MN=\sqrt{3}x(a-2x)=\sqrt{3}ax-2\sqrt{3}x^2$

S est dérivable sur IR , en particulier sur $[0,a]$

$S'(x)=\sqrt{3}a-4\sqrt{3}x$, $S'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}a-4\sqrt{3}x=0 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}x=\sqrt{3}a \Leftrightarrow x=\dfrac{a}{4}$



x	0		$\frac{a}{4}$		a
S'(x)		+	0	−	
S(x)	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$	↘	$-\sqrt{3}a^2$

Conclusion : l'aire du rectangle est maximale pour $x=\dfrac{a}{4}$

Exercice N°28: 1) On a : $x>0$ et $a-2x>0$, $a>2x$; $x<\dfrac{a}{2}$. Donc $0<x<\dfrac{a}{2}$

2) $V=(a-2x)^2.x=(a^2-4xa+4x^2)x=4x^3-4ax^2+a^2x$

3) $x\in\left]0,\dfrac{a}{2}\right[$; $f(x)=4x^3-4ax^2+a^2x$

f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR en particulier sur $\left]0,\dfrac{a}{2}\right[$

72f'(x) = $12x^2-8ax+a^2$; $f'(x)=0$; $\Delta=64a^2-4\times12a^2=64a^2-48a^2=16a^2$

$x' = \frac{8a-4a}{24} = \frac{4}{24}a = \frac{a}{6}$; $x'' = \frac{8a+4a}{24} = \frac{a}{2}$ à rejeter.

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
f'(x)		–		+	
f(x)	0	↗	$\frac{2}{27}a^3$	↘	0

$f\left(\frac{a}{6}\right) = 4\left(\frac{a}{6}\right)^3 - 4a\left(\frac{a}{6}\right)^2 + a^2\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{4}{216}a^3 - \frac{4}{36}a^3 + \frac{a^3}{6} = \frac{4a^3 - 24a^3 + 36a^3}{216} = \frac{16}{216}a^3 = \frac{2}{27}a^3$

$f\left(\frac{a}{2}\right) = 4\left(\frac{a}{2}\right)^3 - 4a\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{4}{8}a^3 - \frac{4}{4}a^3 + \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{2} - a^3 + \frac{a^3}{2} = 0$

5) Pour $x = \frac{a}{6}$ le volume de la boite est maximale.

Exercice N°30: $f(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$; $D_f =]0, +\infty[$

1) a/ $x \mapsto 2x^2$ est dérivable sur IR, $x \mapsto \frac{4}{x^2}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

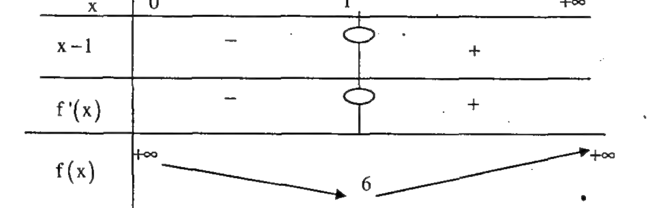
Donc f est dérivable sur $IR \cap]0, +\infty[=]0, +\infty[$ et $f'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}$

b/ Pour $x \in]0, +\infty[$: $f'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} = \frac{4x^3-4}{x^2} = \frac{4(x^3-1)}{x^2} = \frac{4(x^3-1^3)}{x^2} = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$

c/ On a $x^2+x+1 > 0\ \forall x \in]0, +\infty[$; $x^2 > 0\ \forall x \in]0, +\infty[$. Donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Le signe de f' est le signe de (x – 1)

d/



x	0		1		+∞
x – 1		–	0	+	
f'(x)		–	0	+	
f(x)	+∞	↘	6	↗	+∞

2) Les 4 faces sont des rectangles de longueur x et de hauteur h l'aire les quatre faces est 4 x h, l'aire des deux bases et 2 x² .Enfin S = 2x² + 4 x h , Le volume est V = x² h.

3) V = 1 m³

a/ On a $V = x^2 h \Leftrightarrow h = \frac{V}{x^2} \Leftrightarrow h = \frac{1}{x^2}$, b/ $S = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + \frac{4}{x}$

c/ D'après la question 1/ on a S(x) = f(x), donc S est minimale pour x = 1

d/ Le dimensions des réservoir : x = 1 , h = 1, V = 1 m³, S = 6

Exercice N°31:1) a) ; 2) $f'(0) = 1$; 3) a) ; 4) b) ; 5) a)

Exercice N°32 :

1) a) Γ est la courbe de f

b) $f(-1) = 0$; $f(0) = \frac{2}{3}$; $f(1) = 0$; $f'(-1) = \frac{4}{3}$; $f'(1) = 0$

2) Voir tableau

x	–∞		–1		1		+∞
f'(x)		–	0	+	0	–	
f(x)	+∞	↘	0	↗	$\frac{4}{3}$	↘	–∞

3) $T : f'(0)(x-0) + f(0)$ signifie que $T : y = x + \frac{2}{3}$

4) $f(x) = ax^3 + bx + c$; $f(0) = c = \frac{2}{3}$; $f(1) = a + b + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ et $f'(-1) = 3a + b = 0$ signifie que $\begin{cases} a+b = \frac{2}{3} \\ 3a+b = 0 \end{cases}$

signifie que $\begin{cases} a+b = \frac{2}{3} \\ b = -3a \end{cases}$; $a + b = \frac{2}{3}$ signifie que $-2a = \frac{2}{3}$ donc $a = -\frac{1}{3}$ et $b = 1$ d'où $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{2}{3}$

5)

x	–∞		0		+∞
Position		T/ξ	$\xi \cap T = \left\{A\left(0; \frac{1}{3}\right)\right\}$	ξ/T	

Exercice N°33 : $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x+1}-2}$

1) a) $x + 1 \geq 0$ et $x + 1 \neq 4$ donc $D_f = [-1; +\infty[\setminus \{3\}$

b) f est continue sur $[-1; +\infty[\setminus \{3\}$ et $[-1; 3[\subset [-1; +\infty[\setminus \{3\}$ donc f est continue sur $[-1; 3[$.

2) a) $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+1}-2)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x-1)(\sqrt{x+1}+2) = 8$

Donc f est prolongeable par continuité en 3 et $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 3 \\ 8 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

b) $F(x) = x$, Soit $h(x) = F(x) - x$; $h(0) = F(0) - 0 = -3$ et $h(3) = F(3) - 3 = 8 - 3 = 5$

On a $h(0) \times h(3) < 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution a dans $[0; 3]$

3) $\begin{cases} g(x) = F(x) & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = \frac{mx^2+2}{x^2-5x+4} & \text{si } x < 3 \end{cases}$

a) $D_1 = [3; +\infty[$; $D_2 =]-\infty; 3] \setminus \{1\}$ donc $D_f = IR \setminus \{1\}$

b) g est continue en 3 signifie que $\lim_{x \to 3^-} g(x) = g(3)$ signifie que $\frac{9m+2}{-2} = 8$ signifie que $9m = -18$ donc $m = -2$

4) a) $m = -2$; $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{-2x^2+2}{x^2-5x+4} = \lim_{x \to 1} \frac{-2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \to 1} \frac{-2(x+1)}{x-4} = 2$

Donc g est prolongeable par continuité et $G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

b) $G(x) = \frac{-2x^2+2}{x^2-5x+4} = \frac{-2x^2+10x-8+10-10x}{(x-1)(x-4)} = -2 + \frac{10(1-x)}{x-4} = -2 + \frac{10}{4-x}$

c) G est dérivable sur $]-\infty;1]$ et $G'(x)=\dfrac{10}{(4-x)^2}$

x	$-\infty$	1
G'(x)	+	
G(x)	-2 ↗	$\frac{4}{3}$

$\forall x\in]-\infty;1]$; On a $-2\le G(x)\le\dfrac{4}{3}$

Exercice N° 34 : $f(x)=\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$

1) $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty$ donc la droite d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale à (ζ_f) au voisinage de l'infini.

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x+5-(x+1)^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x+1}=0$ d'où la droite $D: y=x+1$ est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage de $(-\infty)$.

b) $f(x)-y=\dfrac{4}{x+1}$ donc (ζ_f) est au dessous de D sur $]-\infty;-1]$

x		-1	
f(x)−y	−	‖	+

3) a) f est une fonction rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\dfrac{\frac{x^2+2x+5}{x+1}-\frac{a^2+2a+5}{a+1}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(a+1)(x^2+2x+5)-(x+1)(a^2+2a+5)}{(x-a)(x+1)(a+1)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{ax^2+5a+x^2-3x-a^2x-a^2-2a}{(x-a)(x+1)(a+1)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{ax^2+x^2+3a-a^2x-a^2+3x}{(x-a)(x+1)(a+1)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{ax(x-a)+3(a-x)+x^2-a^2}{(x-a)(x+1)(a+1)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(ax-3+x+a)}{(x-a)(x+1)(a+1)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{ax-3+x+a}{(x+1)(a+1)}=\dfrac{a^2+2a-3}{(a+1)^2}.$

b) La pente de la droite (AB) $\alpha=\dfrac{f(3)-f(0)}{3}=\dfrac{5-5}{3}=0$

$f'(a)=0$ signifie que $a^2+2a-3=0$; $a_1=1$ ou $a_2=-3$ Il existe deux tangentes à (ζ) parallèles à (AB)

$T_1: y=f'(1)(x-1)+f(1)\Leftrightarrow T_1: y=0(x-1)+4\Rightarrow T_1: y=4$; $T_2: y=f'(-3)(x+3)+f(-3)\Rightarrow T_2: y=-4$

II) $g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si } x\in]-\infty;0[\\ x+3+\sqrt{\dfrac{x+4}{x+1}} & \text{si } x\in[0;+\infty[\end{cases}$

1) $D_1=]-\infty;0[$; $\dfrac{x+4}{x+1}>0$

x		-4		-1	
x+4	−	0	+		+
x+1	−		−	0	+
$\frac{x+4}{x+1}$	+		−	‖	+

Donc $\dfrac{x+4}{x+1}>0$ sur $]-\infty;-4]\cup]-1;+\infty[$

D'où $D_2=]-\infty;-1]\cup]-1;+\infty[\cap[0;+\infty[=[0;+\infty[$

$D_f=]-\infty;0[\cup[0;+\infty[=\mathbb{R}$

2) $g(0)=5$; $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}=5$ donc g est continue à gauche en 0.

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+3+\sqrt{\dfrac{x+4}{x+1}}\right)=5$ donc g est continue à droite en 0 et par suite g est continue en 0.

3) **Dérivabilité à gauche en 0** : $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=-3$

Dérivabilité à droite en 0 : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+3+\sqrt{\frac{x+4}{x}}-5}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{\frac{x+4}{x+1}}+x-2}{x}=\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x+4}{x+1}-(x-2)^2}{x\left(\sqrt{\frac{x+4}{x+1}}-(x-2)\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+4-(x+1)(x^2-4x+4)}{x(x+1)\left(\sqrt{\frac{x+4}{x+1}}-x+2\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+4-x^3+4x^2-4x-x^2+4x-4-4}{x(x+1)\left(\sqrt{\frac{x+4}{x+1}}-x+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x^3+3x^2+x}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{x+4}{x+1}}-x+2\right)}=\dfrac{1}{4}$. $f'_d(0)\ne f'_g(0)$ Donc f n'est pas dérivable en 0 et la courbe de f admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

4) $\Delta: y=x+4$; $g(x)-y=1+\sqrt{\dfrac{x+4}{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-y]=-1+\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x+4}{x+1}}=-1+1=0$ donc Δ est une asymptote oblique à (ξ_f) en $(+\infty)$

Exercice 35

1) $\tan(a-b)=\dfrac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}=\dfrac{\sin a\cos b-\cos a\sin b}{\cos a\cos b+\sin a\sin b}=\dfrac{\text{csa}\cos b}{\cos a\cos b}\dfrac{\frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\sin b}{\cos b}}{1+\frac{\sin a}{\cos a}\times\frac{\sin b}{\cos b}}=\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a).\tan(b)}$

2) On remarque que $P\hat{T}Q\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et la fonction tangente étant strictement croissante sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, α est maximal si et seulement si $\tan\alpha$ est maximal.

On a $\tan\alpha=\tan(E\hat{T}Q-E\hat{T}P)=\dfrac{\tan(E\hat{T}Q)-\tan(E\hat{T}P)}{1+\tan(E\hat{T}Q)\times\tan(E\hat{T}P)}=\dfrac{\frac{15,6}{x}-\frac{10}{x}}{1+\frac{15,6}{x}\times\frac{10}{x}}$ d'où $\tan\alpha=\dfrac{5,6}{x^2+156}=f(x)$.

On étudie les variations de

$f: f'(x)=\dfrac{-5,6(x^2-156)}{(x^2+156)^2}$

x	0		$\sqrt{156}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x) = tan α	0	↗	Max	↘	0

Conclusion : α est maximal pour $x=\sqrt{156}$

Solutions

Exercice N° 1 : 1)a ; 2) b) ;3)b) ;4)c) ;5) c) ;6) b) ;7)b ;8)c

Exercice N° 2 : 1) Faux car : $(AB)\perp(AC)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=0$

2°/ Faux :car si $\vec{u}\perp\vec{v}$ et $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}\Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$

3°/ Faux : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire de sens opposé on a : $\vec{u}\,.\,\vec{v}=-\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

4°/ Vrai : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow$ ABC est un triangle rectangle au A.

Exercice 3 : 1) voir figure

2°/ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA.OB.\cos A\hat{O}B$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires de sens opposé donc $A\hat{O}B=\pi$ et OA = 5 , OB=3 ;

$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB}=5\times3\times\cos\pi=15\times(-1)=-15$

* $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC}=OA\,.\,OC\,\cos\ A\hat{O}C$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont de même sens donc $A\hat{O}C=0$; $OA=5$, $OC=2$ * $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC}=5\times2\times\cos 0=10$

* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA.CB.\cos\ \pi=3\times5\,.\times(-1)=-15$

* $\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CO}$; Car O est le projeté orthogonal de E sur D .

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CO}=CA.CO.\cos A\hat{C}O=3\times2\times\cos\pi=-6$

* $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BO}=BA\,.\,BO\,\cos\ A\hat{B}O=8\times3\,.\,\cos\ 0=24$

* $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OE}=0$ car $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OE}$

Exercice N°4 1) $IJ=3\sqrt{2}$ cm ; $DI=3\sqrt{5}$ cm ; $DJ=3\sqrt{5}$ cm

2) a) $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CJ}\Rightarrow\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DJ}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI})(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CJ})=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CJ}$

$=0+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}+0=CB.CI+AI.AB=6\times3+6\times3=36$

b) $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DJ}=DI.DJ.\cos I\hat{D}J\Rightarrow\cos I\hat{D}J=\dfrac{36}{3\sqrt{5}\times3\sqrt{5}}=0.8\Rightarrow I\hat{D}J=37°$.

Exercice n°5 : 1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow$ E est la perpendiculaire à (AB) en I.

2) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow$ E est le cercle de diamètre [AB].

3) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=AM.BM\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=AM.BM\Leftrightarrow AMBM\cos A\hat{M}B=AM.BM\Leftrightarrow\cos A\hat{M}B=1\Leftrightarrow$ E est la droite (AB) privée de [AB].

4) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=-AM.BM\Leftrightarrow\cos A\hat{M}B=-1\Leftrightarrow$ E est le segment $[AB]\backslash\{A,B\}$.

5) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow AB^2=0$ ce qui est absurde car $A\neq B$ donc $E=\varnothing$.

Exercice N°6 1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG}=2a\times a\times\cos\dfrac{\pi}{3}=a^2$

2) Les triangles EFC et EGD sont équilatéraux alors $\widehat{GEF}=\dfrac{\pi}{3}$. Comme EG = EF alors EFG est aussi un triangle équilatéral .Les angles alternes-internes $\widehat{DEG}$ et $\widehat{EGF}$ formés par les droites (FG);(DC) et la

sécante (GE) sont égaux Alors (GF)//(DC) .de plus $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont de même sens alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GF}=AB.GF=2a\times a=2a^2$.

3) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{DE}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG})\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{DE}=0+DG.DE.\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{a^2}{2}$

4) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BF}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG})(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF})=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{CF}$

$=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{CF}$. On a $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=a^2$;

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CF}=-CB.CF.\cos\widehat{BCF}=-a\times a\times\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-a^2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{DA}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. On montre facilement que DGFE est un parallélogramme, Alors $\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FC}=\dfrac{a^2}{2}\Rightarrow\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BF}=a^2+\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{a^2}{2}=a^2\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}\right)$

Exercice N°7 : AB = 6; AD = 3 ; $\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

1) a) $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=-BC^2=-9$; $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}=BI\times BA=\dfrac{6}{4}\times6=9$ car A est le projeté orthogonal de D sur (AB)

b) $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI})\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}=-9+9=0$ donc $\overrightarrow{CI}\perp\overrightarrow{BD}$ signifie que $(CI)\perp(BD)$

2) * $MB^2+MD^2=45$. Soit $J=B*D$; $MB^2+MD^2=2MJ^2+2\overrightarrow{MJ}\Big(\underbrace{\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JD}}_{\vec{0}}\Big)+JB^2+JA^2=2MJ^2+2JA^2$

$=2MJ^2+\dfrac{45}{2}$. $MB^2+MD^2=45$ signifie que $2MJ^2+\dfrac{45}{2}=45$ signifie que $2MJ^2=\dfrac{45}{2}$ signifie que $MJ=\dfrac{\sqrt{45}}{2}$ Donc E est le cercle de centre J et de rayon $r=\dfrac{\sqrt{45}}{2}$

* $(\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB})\overrightarrow{MI}=MB^2.\overrightarrow{MI}$ signifie que $\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MB}^2\right)=0$ signifie que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=0$ signifie que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC}=0$ donc $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MB}=0$ alors $\overrightarrow{MI}\perp\overrightarrow{MB}$ et par suite F est le cercle de diamètre [IB]

Exercice N°8: 1) a) $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ signifie que $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

b) $AG=\dfrac{3}{4}AB=6$; $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow BG=\dfrac{1}{4}BA=2$

2) $(E):MA^2+3MB^2=64$ a) $BA^2+3BB^2=8^2=64$ donc $B\in(E)$

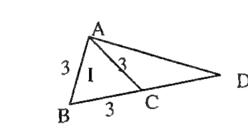
b) $MA^2+3MB^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2=MG^2+AG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+3MG^2+3GB^2+6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$

$=4MG^2+GA^2+3MG^2+\overrightarrow{MG}\Big(\underbrace{\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}}_{\vec{0}}\Big)=4MG^2+GA^2+3MG^2$.

c) $MA^2+3MB^2=64$ signifie que $4MG^2+GA^2+3GB^2=64$ signifie que $4GM^2+36+12=64$ signifie que $4MG^2=64-48=16$ signifie que $MG=2$ Donc (E) est le cercle de centre G et de rayon 2.

Exercice N°9: 1)a)On a : $AD^2=AC^2+CD^2-2AC.CD.\cos\widehat{ACD}=9+9-18.\cos\frac{2\pi}{3}=18-18\times\left(-\frac{1}{2}\right)=27$

Donc $AD=3\sqrt{3}$.



b) $AB^2+AD^2=9+27=36$; $BD^2=6^2=36$. Donc $AB^2+AD^2=BD^2$
Alors ABD est un triangle rectangle en A.

2) $\overline{AB}.\overline{AC}=AB.AC.\cos\widehat{BAC}=\frac{9}{2}$;

$\overline{BD}.\overline{AC}=BD.AC.\cos\left(\overline{BD};\overline{AC}\right)=6\times3\times\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{18}{2}=-9$

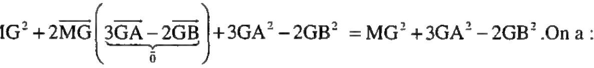
3) a) $MA^2-MB^2=\left(\overline{MA}+\overline{MB}\right)\left(\overline{MA}-\overline{MB}\right)=2\overline{MI}.\overline{BA}=2\overline{IM}.\overline{AB}$

b) $MA^2-MB^2=-9\Leftrightarrow 2\overline{IM}.\overline{AB}=-9\Leftrightarrow\overline{IM}.\overline{AB}=-\frac{9}{2}$. Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB). On a :

$\overline{IM}.\overline{AB}=-\frac{9}{2}$ donc $\overline{IM}$ et $\overline{AB}$ sont de sens contraire ; Δ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

4) a) On a : $3\overline{GA}-2\overline{GB}=\vec{0}$;

$3\overline{MA}^2-2\overline{MB}^2=3\left(\overline{MG}+\overline{GA}\right)^2-2\left(\overline{MG}+\overline{GB}\right)^2=3MG^2+6\overline{MG}.\overline{GA}+3GA^2-2MG^2-4\overline{MG}.\overline{GB}-2GB^2$



$=MG^2+2\overline{MG}\left(\underbrace{3\overline{GA}-2\overline{GB}}_{\vec{0}}\right)+3GA^2-2GB^2=MG^2+3GA^2-2GB^2$. On a :



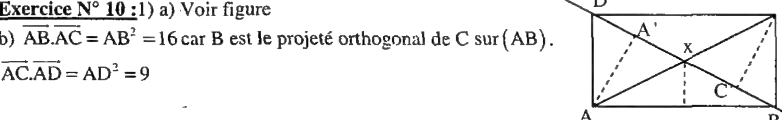
$\overline{AG}=-\frac{2}{1}\overline{AB}=-2\overline{AB}$ signifie que $AG^2=4AB^2=36$;

$\overline{GB}=3\overline{AB}\Rightarrow GB^2=9AB^2=81$. $3GA-2GB^2=3\times36-2\times81=108-16=-54$ d'où

$3MA^2-2MB^2=MG^2-54$

b) $3MA^2-2MB^2=-38$ signifie que $MG^2-54=-38$ signifie que $MG^2=16$ signifie que $MG=4$
Donc E est le cercle de centre G et de rayon 4.

Exercice N° 10 : 1) a) Voir figure



b) $\overline{AB}.\overline{AC}=AB^2=16$ car B est le projeté orthogonal de C sur (AB).

$\overline{AC}.\overline{AD}=AD^2=9$



$\overline{AC}.\overline{BD}=\overline{AC}\left(\overline{BA}+\overline{AD}\right)=\overline{AC}.\overline{BA}+\overline{AC}.\overline{AD}=-\overline{AC}.\overline{AB}+\overline{AC}.\overline{AD}=-16+9=7$.

c) On a $\overline{AC}.\overline{BD}=AC.BD.\cos\left(\widehat{CID}\right)$ signifie que $\cos\left(\widehat{CID}\right)=\frac{\overline{AC}.\overline{BD}}{AC.BD}$ on a $AC=BD=\sqrt{9+16}=5$ donc

$\cos\left(\widehat{CID}\right)=\frac{-7}{5\times5}=\frac{-7}{25}$

2) a) $\overline{AI}.\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{AB}$ (car $\overline{AI}=\frac{1}{2}\overline{AC}$) $=\frac{16}{2}=8$

b) $\overline{AM}.\overline{AB}=8\Leftrightarrow\left(\overline{AI}+\overline{IM}\right).\overline{AB}=8\Leftrightarrow\overline{IM}.\overline{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow(MI)\perp(AB)$ et par suite $\Delta=\text{méd}([AB])$.

3) $\Gamma=\{M\in P;2MA^2+MD^2=18\}$; $2\overline{GA}+\overline{GD}=\vec{0}$; $\overline{AG}=\frac{1}{3}\overline{AD}$

a) $2DA^2+DD^2=2DA^2=2\times9=18$ Donc $D\in\Gamma$

b) $2MA^2+MD^2=2\left(\overline{MG}+\overline{GA}\right)^2+\left(\overline{MG}+\overline{GD}\right)^2=3MG^2+2\overline{MG}\left(\underbrace{2\overline{GA}+\overline{GD}}_{\vec{0}}\right)+2GA^2+GD^2$

$=3MG^2+2GA^2+GD^2$; $GA^2=\frac{1}{9}\times9=1$ donc $2GA^2=2$; $GD^2=\frac{4}{9}\times9=4$ signifie que

$2MA^2+MD^2=3MG^2+4+2=3MG^2+6$

$3MG^2+6=18$ signifie que $3MG^2=12$ signifie que $MG=2$ alors Γ est le cercle de centre G et de rayon 2.

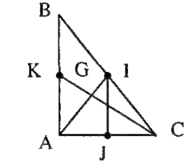
4) a) $\overline{AC}.\overline{BD}=\overline{A'C'}.\overline{BD}=-A'C'.BD=-5A'C'$ ($\overline{A'C'}$ et $\overline{BD}$ sont colinéaires de sens contraire) et $BD=\sqrt{4^2+3^2}$

b) On a : $\overline{AC}.\overline{BD}=-5A'C'=-7$ d'où $A'C'=\frac{7}{5}$

Exercice N° 11 : $AC=2$; $BC=3$; $I=B*C$ et $J=A*C$

1) $\overline{IA}.\overline{AC}=-\overline{AI}.\overline{AC}=-AJ.AC=-2$; $\overline{IA}.\overline{IC}=-\overline{AI}\left(\overline{IA}+\overline{AC}\right)=IA^2+\overline{IA}.\overline{AC}=IA^2-2$

ABC rectangle en A et I le milieu de $[BC]$ donc $IA=\frac{BC}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow\Rightarrow\overline{IA}.\overline{IC}=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}$



2) $MB^2+MC^2=\frac{25}{2}$ signifie que $\left(\overline{MI}+\overline{IB}\right)^2+\left(\overline{MI}+\overline{IC}\right)^2=\frac{25}{2}$

$\Leftrightarrow 2MI^2+2\overline{MI}\left(\underbrace{\overline{IB}+\overline{IC}}_{\vec{0}}\right)+IB^2+IC^2=\frac{25}{2}$ signifie que $2MI^2+\frac{18}{4}=\frac{25}{2}$

signifie que $MI=4$ donc $E=\xi_{(I,2)}$.

3) $F=\{M\in P;\overline{MB}.\overline{MC}+\overline{GA}.\overline{MG}=-1\}$

a) on a $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overline{GB}=\frac{1}{3}\left(\overline{AB}+\overline{CB}\right)=\frac{1}{3}\left(\overline{AB}-\overline{BC}\right)$ et $\overline{GC}=\frac{1}{3}\left(\overline{AC}+\overline{BC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overline{BC}+\overline{AC}\right)$.

$\overline{GB}.\overline{GC}=\frac{1}{9}\left(\overline{AC}+\overline{BC}\right)\left(\overline{AB}-\overline{BC}\right)=\frac{1}{9}\left(\overline{AC}.\overline{AB}-\overline{AC}.\overline{BC}+\overline{BC}.\overline{AB}-BC^2\right)$

$=\frac{1}{9}\left(0-CA^2-BA^2-BC^2\right)=\frac{1}{9}\left(0-\left(CA^2+BA^2\right)-BC^2\right)=-\frac{2BC^2}{9}=-2$

b) $\overline{MB}.\overline{MC}+\overline{GA}.\overline{MG}=\left(\overline{MG}+\overline{GB}\right)\left(\overline{MG}+\overline{GC}\right)+\overline{GA}.\overline{MG}=MG^2+\overline{MG}\left(\overline{GB}+\overline{GC}\right)+\overline{GB}.\overline{BC}+\overline{GA}.\overline{MG}$

$=MG^2-\overline{MG}.\overline{GA}-2+\overline{GA}.\overline{MG}=MG^2-2$

c) $MG^2-2=-1$ signifie que $MG^2=1$ signifie que $MG=1$ donc $F=\xi_{(G;1)}$.

Exercice n°12 :

1) a) $\overline{CA}.\overline{CB}=\overline{CB}.\overline{CB}=16$ car le projeté orthogonal de A sur (BC) est B. $\overline{CA}.\overline{CE}=\overline{CD}.\overline{CE}=2\times8=16$

b) $\overline{CA}.\overline{BE}=\overline{CA}.\left(\overline{BC}+\overline{CE}\right)=\overline{CA}.\overline{BC}+\overline{CA}.\overline{CE}=-16+16=0\Rightarrow\overline{CA}\perp\overline{BE}$.

3) En utilisant le théorème de Thalès, on a : $\left.\begin{array}{l} E\in[BF] \\ D\in[AF] \\ (DE)//(AB) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{FD}{FA}=\frac{DE}{AB}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \Rightarrow DF=\frac{3}{4}AF$ et

comme $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires et de même sens alors $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=4\overrightarrow{AD}$ donc

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}.4\overrightarrow{AD}=4\times16=64$

4) a) $AB^2+4AE^2=64+4(AD^2+DE^2)=64+4(16+36=272)$

b) $\left.\begin{array}{l} I\in[BF] \\ I\in[AF] \\ (CE)//(AB) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ID}{IE}=\frac{AB}{EC}=\frac{8}{2}=4 \Rightarrow IB=4IE$ et

comme $I\in[EB]$ alors $\overrightarrow{IB}=-4\overrightarrow{IE} \Rightarrow \overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IE}=\vec{0}$ c'est-à-dire I est le barycentre des points pondérés (B,1) et

(E,4). $EB^2=EC^2+BC^2=4+16=20 \Rightarrow EB=2\sqrt{5}$.

$\Leftrightarrow IB+IE=2\sqrt{5} \Rightarrow IB+\frac{1}{4}=2\sqrt{5} \Rightarrow IB=\frac{8\sqrt{5}}{5}$ et $IE=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

c) Pour tout point M du plan on a :

$$MB^2+4ME^2=5MI^2+IB^2+4IE^2=5MI^2+\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=5MI^2+16.$$

d) $M\in\zeta \Leftrightarrow 5MI^2+16=272 \Leftrightarrow MI=\frac{16\sqrt{5}}{5}$ donc ζ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ et on sait que ça passe par le point A d'où la construction.

Exercice N°13 : $A(1;0)$; $B(-3;8)$; $C(3-\sqrt{3};1+2\sqrt{3})$.

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\\1+2\sqrt{3}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-4(2-\sqrt{3})+8(1+2\sqrt{3})=-8+4\sqrt{3}+8+16\sqrt{3}=20\sqrt{3}$

b) $AB=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$; $AC=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+(1+2\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{4-4\sqrt{3}+3+1+4\sqrt{3}+12}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|\cos B\hat{A}C$ signifie que $\cos B\hat{A}C=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{20\sqrt{3}}{40}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $I(0;2)$; $J(3;-4)$. a) $MJ=\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}$; $MI=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$; $MJ=2MI$ signifie que $MJ^2=4MI^2$ signifie que $(x-3)^2+(y+4)^2=4x^2+4(y-2)^2$ signifie que

$x^2-6x+9+y^2+8y+16=4x^2+4y^2-16y+16$ signifie que $-3x^2-6x-3y^2+24y+9=0$ signifie que $3x^2+6x+3y^2-24y-9=0$ signifie que $x^2+2x+y^2-8y-3=0$

b) $x^2+2x+y^2-8y-3=0$ signifie que $(x+1)^2-1+(y-4)^2-16-3=0$ signifie que

$(x+1)^2+(y-4)^2=20$ donc ξ est un cercle de rayon $2\sqrt{5}$ et de centre $L(-1;4)$. Montrons que $L=A*B$.

$\frac{x_A+x_B}{2}=-1$; $\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{8}{2}=4$ donc $L=A*B$ d'où ξ est le cercle de diamètre $[AB]$

3) a) (T) la tangente à (ξ) en A signifie que $\overrightarrow{AL}$ est un vecteur normal à (T); $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

$T: ax+by+c=0$ signifie que $T: -2x+4y+c=0$; on a $A\in(\xi)$ signifie que $-2\times1+4\times0+c=0 \Rightarrow c=2$

D'où $T: -2x+4y+2=0$ signifie que $T: -x+2y+1=0$

b) $MJ^2-MI^2=15$ signifie que $x^2-6x+y^2+8y+25-(x^2+y^2-4y+4)=15$ signifie que

$-6x+8y+25+4y-4=15$ signifie $-6x+12y+6=0$ signifie que $-x+2y+1=0$.

Exercice 14 :

1)a) $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2=MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+MI^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$

$=2MI^2+IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\underbrace{\left(\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}\right)}_{0}=2MI^2+8$

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}).(\overrightarrow{MJ}-\overrightarrow{JA})=MJ^2-JA^2=MJ^2-9$

c) $MA^2+MB^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=1 \Leftrightarrow 2MI^2+8-MJ^2+9=1 \Leftrightarrow 2MI^2-MJ^2=-16$

Soit G le barycentre de $(I,2)$ et $(J,-1)$

$2\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{MJ}^2=2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GI})^2-(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GI})^2=2MG^2+2GI^2+4\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GI}-MG^2-GJ^2-2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GJ}$

$=MG^2+2GI^2-GJ^2+2MG\left(\underbrace{2\overrightarrow{GI}-\overrightarrow{GJ}}_{\vec{0}}\right)$

$\overrightarrow{IG}=\frac{-1}{1}\overrightarrow{IJ} \Rightarrow \overrightarrow{IG}=-\overrightarrow{IJ} \Rightarrow IG=IJ=4$; $\overrightarrow{JG}=\frac{2}{1}\overrightarrow{JI} \Rightarrow JG=2JI=8$

Donc $2MI^2-MJ^2=MG^2+32-64=MG^2-32$

$2MI^2-MJ^2=-16 \Leftrightarrow MG^2-32=-16 \Leftrightarrow MG^2=16 \Leftrightarrow MG=4 \Rightarrow \zeta=\zeta_{(G,4)}$

2)a) $MI^2-MJ^2=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{MJ}^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MJ})=2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{GI}$ car $(O=I*J)$

$=2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OK}$ car k est le projeter orthogonale de H sur (IJ) et $O\in(IJ)$

b) $MA^2+MB^2-2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=-6 \Leftrightarrow 2MI^2+8-2MJ^2+18=-6 \Leftrightarrow 2MI^2-2MJ^2=-32 \Leftrightarrow MI^2-MJ^2=-16$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OK}=-16 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OK}=-8 \Leftrightarrow \begin{cases} IJ.OK=8 \\ \overrightarrow{IJ} \text{ et } \overrightarrow{OK} \text{ de sens contraires} \\ k\in(IJ) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OK=2 \\ \overrightarrow{IJ} \text{ et } \overrightarrow{OK} \text{ colinéaires et de sens contraires} \end{cases}$

$\Leftrightarrow K=I$. Δ est la droite perpendiculaire à (IJ) passant par I.

Exercice 15 : 1°/ On a : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow BC^2=(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA})^2=BA^2+CA^2-2\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CA}=BA^2+CA^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Rightarrow$

$2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=BA^2+CA^2-BC^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(25+25-36)=7$

2°) $f(M)=2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

$f(M)=2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})$.

$= 2MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GB}\,\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + MG^2 + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

$+ MG^2 + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$

$= 4MG^2 + \overrightarrow{MG}(3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GA}) + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = 4MG^2 + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}.$

3) On a : $f(A) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA}.\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 14$, $f(G) = 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$

On peut déduire que : $f(M) = f(G) + 4\overrightarrow{MG}^2 \Leftrightarrow f(A) = f(G) + 4\overrightarrow{AG}^2$

$f(A) = f(M) \Leftrightarrow f(G) + 4\overrightarrow{MG}^2 = f(G) + 4\overrightarrow{AG}^2 \Leftrightarrow 4MG^2 = 4AG^2 \Leftrightarrow MG = AG$

Donc l'ensemble de points M tel que f(M) = f(A) est le cercle de centre G et passant par A et de rayon AG. Déterminons le rayon de ce cercle :

$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{GI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{6}{8}\overrightarrow{AI}$

$\Leftrightarrow AG = \frac{3}{4}AI$; Or $AI^2 = AB^2 - BI^2 = 16 \Leftrightarrow AI = 4$. Donc $AG = 3$ et par suite l'ensemble est $\zeta_{(G,3)}$

4) a) On a $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$; $A(1,4)$, $B(-2,0)$ et $C(4,0)$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{2x_A + 3x_B + 3x_C}{8} \\ y_G = \dfrac{2y_A + 3y_B + 3y_C}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2-6+12}{8} = 1 \\ y_G = \dfrac{8+0+0}{8} = 1 \end{cases} \Rightarrow G(1,1)$$

b/ On a f(A) = 14 ; $f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MB}$

Soit M (x , y) un point de plan : $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\4-y\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-2-x\\-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}4-x\\-y\end{pmatrix}$

$f(M) = 2(-2-x)(4-x) + 2y^2 + (4-x)(1-x) - y(4-y) + (1-x)(-2-x) + y^2 - 4y = 4x^2 + 4y^2 - 8x - 8y - 14$

$F(M) = f(A) \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 8x - 8y - 14 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$

C'est l'équation du cercle de centre G (1, 1) et de rayon 3.

Exercice N°16 : 1) a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = AB.AE\cos\frac{\pi}{3} = a.a.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = AD.AE\cos\widehat{EAD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} = AC.AE\cos E\hat{A}C = \frac{1+\sqrt{3}}{2}a^2$ signifie que $\sqrt{2}$ a. a $\cos E\hat{A}C = \frac{1+\sqrt{3}}{2}a^2$

signifie que $\cos E\hat{A}C = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ Donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

D'après le théorème d'El Kashi on a : $OE^2 = AE^2 + AO^2 - 2AE.AO\cos E\hat{A}O$;

$AE^2 = a^2; AO^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$; $OE^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} - 2.a.\frac{\sqrt{2}}{2}a.\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}a^2 - a^2\frac{1+\sqrt{3}}{2} = a^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2) Soit $M \in P$; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = MO^2 + \overrightarrow{MO}\big(\underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}_{\vec{0}}\big) - \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OC}$

$= MO^2 - AO^2 = MO^2 - \frac{a^2}{2}$. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \frac{a^2}{2}$ signifie que $MO^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$ signifie que $MO^2 = a^2$ signifie que $MO = a$ donc l'ensemble E_1 est le cercle de centre O et de rayon a.

3) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

a) $MA^2 + 2MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$

$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\big(\underbrace{\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB}}_{\vec{0}}\big) + GA^2 + 2GB^2 = 3MG^2 + \frac{4}{9}AB^2 + \frac{2}{9}AB^2 = 3MG^2 + \frac{6}{9}AB^2 = 3MG^2 + \frac{2}{3}a^2$

b) $MA^2 + 2MB^2 = a^2$ signifie que $3MG^2 + \frac{2}{3}a^2 = a^2$ signifie que $3MG^2 = \frac{1}{3}a^2$ signifie que $MG^2 = \frac{a^2}{9}$

signifie que $MG = \frac{2}{3}$ d'où E_2 est le cercle de centre G et de rayon $\frac{a}{3}$.

c) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CM}$ signifie que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CM} = \vec{0}$ signifie que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ signifie que $\overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = \vec{0}$ signifie que $\overrightarrow{MC}.3\overrightarrow{MG} = \vec{0}$ signifie que $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MG} = \vec{0}$ donc E_3 est le cercle de centre le milieu du segment $[GC]$ et de rayon $\frac{GC}{2}$.

4) $\Delta = \left\{MA^2 - MO^2 = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; $EA^2 - EO^2 = a^2 - a^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $E \in \Delta$.

$M \in \Delta \Leftrightarrow MA^2 - MO^2 = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ signifie que $(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 - (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EO})^2 = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ signifie que

$ME^2 + 2\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EA} + EA^2 - ME^2 - 2\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EO} - EO^2 = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ signifie que $2\overrightarrow{ME}(\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EO}) + EA^2 - EO^2 = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$

signifie que $2\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{OA} + a^2\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ signifie que $2\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{OA} = \vec{0}$ signifie que $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{OA} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{OA}$

ainsi Δ est la droite perpendiculaire à (OA) passant par E.

Exercice 17: 1°) On a $MA^2 + MB^2 - AB^2 = MA^2 + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB})$

$= MA^2 + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) = MA^2 + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB})$

$= \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$. Donc : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2}$

2°/ a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = m \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 - AB^2 = 2m \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 2m + AB^2$

D'après la formule de la médiane on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$, $I = A * B$

On obtient donc : $2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2m + AB^2 \Leftrightarrow 2MI^2 = 2m + \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow MI^2 = m + \frac{AB^2}{4}$

1er cas : si $m + \frac{AB^2}{4} < 0$, Alors $E = \emptyset$

$2^{\text{ème}}$ **cas** : si $m+\frac{AB^2}{4}=0 \Leftrightarrow m=\frac{-AB^2}{4} \Leftrightarrow M=I$ Ainsi $E=\{I\}$

$3^{\text{ème}}$ **cas** : si $m+\frac{AB^2}{4}>0$, alors E est un cercle de centre I et de rayon $r=\sqrt{m+\frac{AB^2}{4}}$

b/ E est un cercle de diamètre [AB] $\Leftrightarrow m=0$

Exercice 18: 1°/ a) $\overline{AB}.\overline{AC}=AB.AC.\cos C\hat{A}B=3\times 6.\cos\frac{2\pi}{3}=-9$

b) $\overline{AB}.\overline{AC}=\overline{AB}.\overline{AH}=AB.AH.\cos\pi=-AB.AH=-9.$

Donc : $AH=\frac{9}{AB}=\frac{9}{3}=3$

2°) On a $\overline{AB}.\overline{AH}=-9$

* Puisque $H\in(AB)$ et $\overline{AB}.\overline{AH}=-9<0$ Alors

$\overline{AB}$ et $\overline{AH}$ sont colinéaires de sens contraire.

* On a aussi AB = AH = 3 ; donc

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AH}=\vec{0}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}=\vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{BH}=\vec{0}$

Donc H est barycentre de (A,2) et (B , -1)

3°/ a) $\zeta_1=\left\{M\in P\ ;\ \frac{MB}{MA}=\sqrt{2}\right\}$

$\frac{MB}{MA}=\sqrt{2} \Leftrightarrow MB=MA.\sqrt{2} \Leftrightarrow MA^2=2AM^2 \Leftrightarrow MB^2-2MA^2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}^2-2\overrightarrow{MA}^2=0$

$MB^2-2MA^2=(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB})^2-2(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA})^2=MH^2+HB^2+2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HB}-2(MH^2+2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HA}+HA^2)$

$=MH^2+HB^2+2\overrightarrow{MH}\ \ \overrightarrow{HB}-2MH^2-4\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HA}-2HA^2=-MH^2-2HA^2+HB^2-2\overrightarrow{MH}(2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB})$

$=-MH^2-2HA^2+HB^2=0 \Leftrightarrow MB^2-2MA^2=-MH^2-2\times 3^2+6^2=0$

$\Leftrightarrow -MH^2+18=0 \Leftrightarrow MH^2=18 \Leftrightarrow MH=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. Donc $\zeta_1=\zeta_{(H\ ,\ 3\sqrt{2})}$

b) $\zeta_2=\left\{\ M\in P\ ;\ 2\ \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|\right\}$; $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MH}$

Soit E = A * B ; donc $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME} \Leftrightarrow 2\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow 2\left\|\overrightarrow{MH}\right\|=\left\|2\overrightarrow{ME}\right\| \Leftrightarrow$

MH = ME ; M est équidistant des points H et E Donc ζ_2 est la médiatrice du segment [HE].

Exercice 19:

1°/ a) **1ère méthode** : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=3\sqrt{3}+(-\sqrt{3})\times 1=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. (I)

$2^{\text{ème}}$ **méthode :** $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|.\left\|\overrightarrow{CD}\right\|Cos(A\hat{C}D)$; $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|=CA=\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=CD=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$. Donc $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=2\sqrt{3}\times 2.Cos(A\hat{C}D)=4\sqrt{3}\ Cos\ (A\hat{C}D)$. (II)

b) D'après les relations (I) et (II) on déduit que : $4\sqrt{3}\ Cos\ (A\hat{C}D)=2\sqrt{3} \Leftrightarrow Cos\ A\hat{C}D=\frac{1}{2}$

Donc la mesure de $A\hat{C}D$ est $\frac{\pi}{3}$

2°/ a) Soit M (x , y) un point du plan $M\in\xi \Leftrightarrow \overline{AM}\perp\overline{BM}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+5\\y-8\end{pmatrix}$

$\overline{AM}\perp\overline{BM} \Leftrightarrow \overline{AM}.\overline{BM}=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+5)+y(y-8)=0 \Leftrightarrow x^2+5x-x-5+y^2-8y=0$

$\Leftrightarrow x^2+4x+y^2-8y-5=0$. L'équation de ζ est $x^2+4x+y^2-8y-5=0$

b) Soit D la tangente à ζ au point B ; alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à D . $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$

Donc D : -6x + 8y + c = 0 ; B ∈ D donc : -6 × (-5) + 8 + 8 +c = 0 ⇔ 30 + 64 + c = 0 ⇔ c= -94
Une équation de D est : D : 3x – 4y + 47 = 0

Exercice 20:

1°/ $H\in(AB)$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BH}=2\rangle\ 0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont de même sens.. Par conséquent $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BH}=AB.BH=2$.

Donc $BH=\frac{2}{AB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

2°/a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}=2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BH}$

$\Leftrightarrow \overline{AB}.\overline{BM}-\overline{AB}.\overline{BH}=0 \Leftrightarrow \overline{AB}(\overline{BM}-\overline{BH})=0$

$\Leftrightarrow \overline{AB}.\overline{HM}=0 \Leftrightarrow \overline{AB}\perp\overline{HM}$ .Donc Δ_1 est la droite passant par H perpendiculairement à (AB).

b) $\overline{AB}.\overline{AM}=\overline{AC}.\overline{AM} \Leftrightarrow (\overline{AB}-\overline{AC}).\overline{AM}=0$

$\Leftrightarrow \overline{CB}.\overline{AM}=0 \Leftrightarrow \overline{CB}\perp\overline{AM}$ Donc Δ_2 est la droite perpendiculaire à (CB) passant par A. ; Δ_2 est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

c) $\overline{AB}.\overline{AM}=-\overline{AC}.\overline{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$. Soit $I=B*C$. Donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$

$\overline{AM}(\overline{AB}+\overline{AC})=0 \Leftrightarrow \overline{AM}.2\overline{AI}=0 \Leftrightarrow \overline{AM}.\overline{AI}=0 \Leftrightarrow \overline{AM}\perp\overline{AI}$

Δ_3 est la droite passant par A et perpendiculaire à [AI]

d) Soit G barycentre de (A , 1) et (B , 3)

$MA^2+3MB^2=(\overline{MG}+\overline{GA})^2+3(\overline{MG}+\overline{GB})^2=MG^2+GA^2+2\overline{MG}.\overline{GA}+3MG^2+3GB^2+6\overline{MG}.\overline{GB}$

$=4MG^2+GA^2+GB^2+2\overline{MG}\ (\overline{GA}+3\overline{GB})$. Donc $MA^2+3MB^2=4MG^2+GA^2+GB^2$

On a : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow AG^2=\frac{9}{16}AB^2=9$; $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow BG^2=\frac{1}{16}AB^2=1$, Par conséquent :

$MA^2+3MB^2=4MG^2+10=12 \Leftrightarrow 4MG^2=2 \Leftrightarrow MG^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow MG=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc Δ_4 est un cercle de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 21: 1°/ a) $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $\overline{OM}.\vec{u}=2x+3y=-5 \Leftrightarrow 2x+3y=-5 \Leftrightarrow 2x+3y+5=0$

On peut déduire que ζ est la droite Δ .

b) $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}=-5 \Leftrightarrow OM\|\vec{u}\|=5 \Leftrightarrow OM=\frac{5}{\|\vec{u}\|} \Leftrightarrow OM=\frac{5}{\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{13}$

2°/ a) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA}.\vec{u}=2+(-2)\times3=2-6=-4$ avec $A(1,2)$

b) $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}).\vec{u}=\overrightarrow{AO}.\vec{u}+\overrightarrow{OM}.\vec{u}=\overrightarrow{AO}.\vec{u}-5=-\overrightarrow{OA}.\vec{u}-5=4-5=-1$ donc $\overrightarrow{AM}.\vec{u}$ est indépendant de M.

c) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=-1 \Leftrightarrow AM.\|\vec{u}\|=+1 \Leftrightarrow AM=\frac{1}{\|\vec{u}\|}=\frac{1}{\sqrt{13}}$

Exercice 22: 1°/ * $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB.AD.\cos\widehat{BAD}=5\times3.\cos\frac{\pi}{3}=\frac{15}{2}$

* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=AB^2-AD^2=25-9=16$

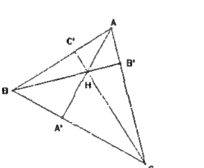
2°/ $\overrightarrow{DB}^2=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=AB^2+AD^2-2\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD}=25+9-2.\frac{15}{2}=34-15=19$. Donc $DB=\sqrt{19}$

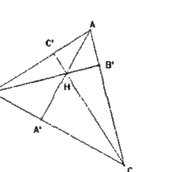
$\overrightarrow{AC}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=AB^2+AD^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=25+9+\frac{15}{2}\times2=34+15=49$. Donc $AC=7$

3°/ On a : O = A * C = B * C : $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DO}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AO}.2\overrightarrow{DO}=4\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{AO}=16$

Donc $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{AO}=4$; $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OD}=-4$ $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OD}=OA.OD\cos(\widehat{AOD})\Rightarrow\cos(\widehat{AOD})=\frac{\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OD}}{OA.OD}=\frac{-16}{7\sqrt{19}}$

Exercice 23: 1°/ voir figure. 2°/ On a $(BH)\perp(CA)$. Donc $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$





3) a) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$ car $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CB}$

b) On a $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{C'H})\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'H})\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{C'H}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{B'H}.\overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{C'H}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{C'H}.\overrightarrow{AB}=0$ .Et $\overrightarrow{B'H}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{B'H}.\overrightarrow{AC}=0$ et par suite $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'}$

4) $H\in(BB')$ et $\overrightarrow{BB'}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HB}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$ (1).

$H\in(CC')$ et $\overrightarrow{CC'}\perp\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HB}$ (2)

D'après (1) et (2) On obtient $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HA}$

5) On a : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HA'}$; $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HB'}$ et $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'}\Rightarrow\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HA'}=\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HB'}=\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'}$

Donc $|\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HA'}|=|\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HB'}|=|\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'}|$

$\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{HA'}$ sont colinéaires de même sens, de même $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HB'}$ et $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HC'}$ donc HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'

Exercise N° 24: 1°) Voir figure:

2°) On a I = A * B; Donc $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$; $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AK}$

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AK})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK})$ car $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AL}=\vec{0}$

3°/ a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HL})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HL}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

car $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HL}=0$

* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HK})=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HK}$

donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$ car $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HK}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AH}=0$.

car $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$. Donc $(AI)\perp(KL)$

Exercice N° 25: 1) a/ A partir de la formule de la médiane, on a la relation entre les 3 cotés

$AB^2+AC^2=2AA'^2+\frac{1}{2}BC^2\Rightarrow AA'^2=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2)-\frac{1}{4}BC^2$

b/ $BA^2+BC^2=2BB^2+\frac{1}{2}AC^2\Rightarrow BB'^2=\frac{1}{2}(BA^2+BC^2)-\frac{1}{4}AC^2$

* $CB^2+CA^2=2CC'^2+\frac{1}{2}BA^2$ sig $CC'^2=\frac{1}{2}(BC^2+AC^2)-\frac{1}{4}AB^2$

On a aussi $GA=\frac{2}{3}AA'$, $GB=\frac{2}{3}BB'$ et $GC=\frac{2}{3}CC'$.

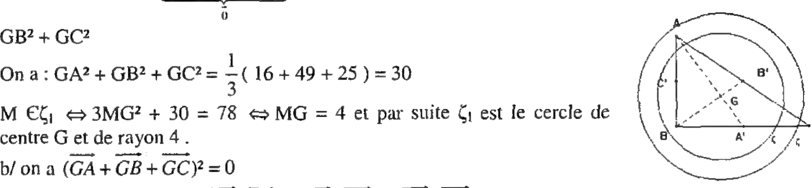
Donc $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{4}{9}(AA'^2+BB'^2+CC'^2)=\frac{4}{9}(\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2+\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}BC^2-\frac{1}{4}AC^2+\frac{1}{2}BC^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}AB^2)=\frac{4}{9}(\frac{3}{4}AB^2+\frac{3}{4}AC^2+\frac{3}{4}BC^2)=\frac{1}{3}(AB^2+AC^2+BC^2)$.

2) AB = 4, AC = 7 et BC = 5.

a/ $MA^2+MB^2+MC^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$

$=MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+GA^2+MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+GB^2+MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}+GC^2$

$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}.\underbrace{(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})}_{\vec{0}}+GA^2+GB^2+GC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$



On a : $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(16+49+25)=30$

M $\in\zeta_1\Leftrightarrow 3MG^2+30=78\Leftrightarrow MG=4$ et par suite ζ_1 est le cercle de centre G et de rayon 4 .

b/ on a $(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})^2=0$

$\Leftrightarrow GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}=0$

$\Leftrightarrow GA^2+GB^2+GC^2+2(\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC})=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}=-\frac{1}{2}(GA^2+GB^2+GC^2)$

c) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{GC})$

$+(\overline{MC}+\overline{GB})(\overline{MG}+\overline{GC}) = 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\underbrace{(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})}_{\vec{0}} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC}$

$= 3MG^2 - \frac{1}{6}(AB^2 + AC^2 + BC^2) = 3MG^2 - 15$, $M \in \zeta_2 \Leftrightarrow 3MG^2 - 15 = 60 \Leftrightarrow MG = 5$ et par suite ζ_2 est un cercle de centre G et de rayon 5 .

Exercice 26: 1) a/ $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2 = MG^2 + GA^2 + MG^2 + GB^2 + MG^2 + GC^2 + 2\overline{MG}\ \underbrace{(\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC})}_{\vec{0}} =$

$3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

On a : O = A * C signifie $OB = \frac{\sqrt{3}}{2}\ AB = 3\sqrt{3}$; Aussi on a

$GB = \frac{2}{3}OB = 2\sqrt{3}$ et par suite $GB = GA = GC = 2\sqrt{3}$.

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 = 3MG^2 + 36$

b) $MA^2 + MB^2 + MG^2 = 45 \Leftrightarrow 3MG^2 + 36 = 45 \Leftrightarrow 3MG^2 = 9 \Leftrightarrow$
$MG = \sqrt{3}$. donc $\zeta = \zeta_{(G,\sqrt{3})}$.

2) $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GC} = 6$. Soit H le projeté orthogonal de M sur (GC)

$\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GC} = 6 \Leftrightarrow \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{GC} = 6$; $\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{GC} > 0 \Rightarrow \overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont colinéaires de même sens.

Donc $\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{GC} = GH.GC = 6 \Rightarrow GH = \frac{6}{GC} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ et par suite D est une droite orthogonale à (GC) passant par H .

3) a) $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 0$; $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \sqrt{3}$. Donc G $(0, \sqrt{3})$

b) Soit M (x, y) ∈ D. $\overline{GM}\begin{pmatrix} x \\ y-\sqrt{3}\end{pmatrix}$; $\overline{GC}\begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $\overline{GM}.\overline{GC} = 6 \Leftrightarrow 3x - \sqrt{3}(y-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow 3x - \sqrt{3}y - 3 = 0$

L'équation de D est $3x - \sqrt{3}y - 3 = 0$

c) d (G, D) = $\frac{|3x0 - \sqrt{3}.\sqrt{3} - 3|}{\sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{|-\sqrt{3}.\sqrt{3} - 3|}{\sqrt{12}} = \frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}$ = le rayon de ζ et par suite D est tangent à ζ.

Exercice 27: 1) on a : $2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overline{DB}+\overline{BA}) - 2\overline{DB} - \overline{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow$
$2(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{DB} - (\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

2) a) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA.BC.\cos ABC = a \times a.\cos\frac{\pi}{3} = a^2.\ \frac{1}{2}$

(Car ABC équilatéral) . Donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

b/ on a $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{BA}$. D'où
(CD) //(AB)
$\overline{BC}(-2\overline{BA}+\overline{BC}) = -2\overline{BC}.\overline{BA} + BC^2 = -a^2 + a^2 = 0$

Conséquence : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = 0$ alors (BC) ⊥ (BD) et par suite D appartient à la droite orthogonal à

(BC) passant par B et à la parallèle à (AB) menée de C

3) on a : $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{BA}$ signifie CD = 2BA signifie CD = 2a

* BDC est un triangle rectangle en B donc : $BD^2 = DC^2 - BC^2 = 3a^2$ signifie 3D = $\sqrt{3}$ a.

* $AD^2 = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2 = (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB})^2 = AB^2 + DB^2 - 2AB\ BD\cos\widehat{ABD}$.

$\widehat{ABD} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$. Donc $AD^2 = a^2 + 3a^2 - 2\sqrt{3}a^2\cos\frac{5\pi}{6} = 4a^2 - 2\sqrt{3}a^2(\frac{-\sqrt{3}}{2}) = 7a^2$ d'où $AD = \sqrt{7}$ a

4) $f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$
a) $f(C) = 2CA^2 - 2CB^2 - CC^2 = 2a^2 - 2a^2 = 0$
b) $f(M) = 2(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA})^2 - 2(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB})^2 - (\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC})^2$
$= 2MD^2 + 2DA^2 + 4\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DA} - 2MD^2 - 2DB^2 - 4\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DB} - MD^2 - 2\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DC} - DC^2$
$= -MD^2 + 2DA^2 - 2DB^2 - DC^2 + 2\overrightarrow{MD}\underbrace{(2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC})}_{\vec{0}} = -MD^2 + 14a^2 - 6a^2 - 4a^2$

$= -MD^2 + 4a^2 = 4a^2 - MD^2$. $F(M) = 4a^2 - MD^2$

c/ $f(M) = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - MD^2 = 0 \Leftrightarrow MD = 2a$; signifie que ζ_1 est un cercle de centre D et de rayon 2a .

5) $g(M) = 2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{DB} + a^2$; $g(M) = a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{DB}$.
M appartient à une droite perpendiculaire a (BD) passant par C donc ζ_2 = (BC).

6) $\{I\} = \zeta_1 \cap \zeta_2$; $\zeta_1 \cap \zeta_2 = \{I, C\}$ signifie DC = DI = 2a.

D'autre part puisque $\begin{cases} (DB) \perp (IC) \\ et \\ I\ et\ C \in \zeta_1 \end{cases}$ alors $B = I * C$ Et par suite IC = 2a

En fin on a DC = DC = IC alors DIC est équilatéral.

Exercice 28: 1)a/ $\vec{u} = a^2\overrightarrow{BC} + b^2\overrightarrow{CA} + c^2\overrightarrow{AB} = a^2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) + b^2\overrightarrow{CA} + c^2\overrightarrow{AB} = a^2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) + b^2\overrightarrow{CA} + c^2\overrightarrow{AB}$
$= (C^2 - A^2)\overrightarrow{AB} + (a^2 - b^2)\overrightarrow{AC}$

b/ on a : $\vec{u}\begin{pmatrix} c^2 - a^2 \\ a^2 - b^2 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$. Supposons que $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a^2 = c^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b = c$. Ce qui implique que ABC est équilatéral alors $\vec{u}$ est non nul.

2) $f(M) = a^2\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA'} + b^2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MB'} + c^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC'}$.

a) $f(O) = a^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OA'} + b^2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{OB'} + c^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC'}$. On a $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{OA'}$ donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OA'} = 0$; de même $\overrightarrow{OC'} \perp \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{OC'}.\overrightarrow{AB} = 0$; $\overrightarrow{OB'} \perp \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OB'} = 0$ et par suite f(O) = 0

b) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{BC}.\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AA'}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}).\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{6}(AC^2 - AB^2) = \frac{1}{6}(b^2 - c^2)$

Donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA'} = \frac{1}{6}(b^2 - c^2)$. $F(G) = a^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GA'} + b^2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{GB'} + c^2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{GC'}$

On a $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{GB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}).\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{6}(AB^2 - BC^2) = \frac{1}{6}(c^2 - a^2)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}).\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{6}(CB^2 - AC^2) = \frac{1}{6}(a^2 - b^2)$ Donc

$f(G) = \frac{1}{6}\ a^2(b^2 - c^2) + \frac{1}{6}b^2(c^2 - a^2) + \frac{1}{6}c^2(a^2 - b^2) = \frac{1}{6}a^2b^2 - \frac{1}{6}a^2c^2 + \frac{1}{2}b^2c^2 - \frac{1}{6}b^2a^2 + \frac{1}{6}c^2a^2 - \frac{1}{2}c^2b^2 = 0$

c) $f(M) = a^2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MA'} + b^2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB'} + c^2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC'}$

$= a^2\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OM}\right)+b^2\overrightarrow{CA}\left(\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OM}\right)+c^2\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OM}\right)$

$= a^2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA'}+b^2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}+c^2\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{OC'}-\left(a^2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}+b^2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OM}+c^2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}\right)$

$= f(O)-\overrightarrow{OM}\cdot\left(a^2\overrightarrow{BC}+b^2\overrightarrow{CA}+c^2\overrightarrow{AB}\right)=f(O)-\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}=-\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}$; $F(M)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}=0$

$\vec{u}\neq\vec{0}$ donc l'ensemble des points et la droite passant par Q et de vecteur normal $\vec{u}$. ; Puisque f(G) = 0 sig $G \in \zeta$ et par suite $\zeta = (OG)$.

Exercice N° 29 :1) Posons N le projeté orthogonal de M sur (AD)

$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PQ}=\left(\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{NM}\right)\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}\right)=\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{BQ}$

$\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ car $(DN)\perp(PB)$; $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{BQ}=-DN\times BQ$ car $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{BQ}$ sont colinéaires et de sens contraires.

$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{PB}=NM\times PB$ car $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{PB}$ sont colinéaires et de même sens.

$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$ car $(MN)\perp(BQ)$ Ainsi $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PQ}=-DN\times BQ+NM+PB \Rightarrow \overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ Par suite les droites (DM) et (PQ) sont perpendiculaires.

Exercice N°30 : $AB=4; BC=2$; $I=D*C$; $3\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$; $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$

1) a) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CB^2=2^2=4$; $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CG}=CA.CG.\cos 0=4\times1=4$

donc $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CG}=4$

b) $\underbrace{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}_{4}=\overrightarrow{CA}\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GB}\right)=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{GB}$ donc $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{GB}=0$

signifie que $(CA)\perp(GB)$

2) a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ car $\overrightarrow{AB}\perp AD$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}=AB.DG.\cos 0=4\times3=12$;
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=BC.AD.\cos 0=2\times2=4$; $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DG}=0$ car $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{DG}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DG}=12$

$\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}\right)=12$ signifie que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AG}=12-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AG}=12+DA^2=12+4=16$

c) On a $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AG}=AC.AK=16$; $AC=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$ d'où $AK=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

3) a) $3MC^2+MD^2=3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}\right)^2=4MG^2+\overrightarrow{MG}\left(\underbrace{3\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}}_{\vec{0}}\right)+3GC^2+GD^2$

$=4MG^2+3+9=4MG^2+12$

b) $3MC^2+MD^2=16$ signifie que $4MG^2=4$ signifie que $MG=1$ donc ξ est le cercle de centre G et de rayon 1.

4) $\Delta=\left\{M\in P \text{ tel que } MD^2-MC^2=16\right\}$

a) $CD^2=16$ donc $CD^2-CC^2=16$ d'où $C\in\Delta$

b) $MD^2-MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IC}\right)+ID^2-IC^2=2\overrightarrow{MI}\cdot2\overrightarrow{CI}=4\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{CI}=16$ signifie **que** $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{CI}=4$ **Soit H le projeté orthogonal** de M sur (CI) donc $HI=\frac{4}{CI}=2$ d'où H est confondu avec C et **par suite Δ est la droite (BC).**

Exercice N°31 : 1) a) $BC=2; CK=6; AC=10$

b) On a ACK est un triangle rectangle. donc $CK^2+AK^2=AC^2$ signifie que $AK^2=AC^2-CK^2=100-36=64$ Donc $AK=8$ On a $AK=BK=8$ donc ABK est isocèle en K.

2) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CK}=-CB.CK=-2\times6=-12$ (car $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires de sens opposé)

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=AK^2=64$; $\overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{CA}=CK^2=36$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KC}=AK^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{KC}=AK^2+CK^2+CB.CK$

$=64+36+12=112$.

$AI^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right)^2=AB^2+BI^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BI}=128+1-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}=129-2\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BI}=129-16=113$ signifie

$AI=\sqrt{113}$

3) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; $f(M)=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{MG}$

a) $f(A)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}=112-\frac{4}{9}(113)=\frac{556}{9}$

$f(G)=\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{GG}=\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}-BC^2\right)$

$=\frac{1}{9}(112-16+12-4)=\frac{104}{9}$

b) $f(M)=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{MG}=MG^2+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)-\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{MG}$

$=MG^2+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MG}\left(\underbrace{\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}}_{\vec{0}}\right)=MG^2+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=MG^2+f(G)$

c) $f(M)=\frac{556}{9}$ signifie que $MG^2+f(G)=\frac{556}{9}$ signifie que $MG^2=\frac{556}{9}-\frac{104}{9}=\frac{452}{9}$ signifie que

$MG=\frac{\sqrt{452}}{3}$ Donc ξ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{452}}{3}$.

Exercice N°32: $I=A*B$; $J=B*C$; $K=D*C$ et $E=S_C(D)$

1) a) $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}\right)=\underbrace{\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}}_{0}+\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{DC}$

$=-\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DC}=DK.DC=-2\times4=-8$

b) $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}=OD.OE.\cos D\hat{O}E$; $OD=2\sqrt{2}$;

$OE^2=OC^2+CE^2-2OC.CE.\cos\frac{3\pi}{4}=8+16-16\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=40$

Donc $OE=2\sqrt{10}$; $\cos D\hat{O}E=\frac{\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{DE}}{OD.OE}=\frac{-8}{2\sqrt{2}.2\sqrt{10}}=\frac{-8}{4\sqrt{20}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2) a) $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AI}=-AB.AI=-8$; $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AD}=AJ'.AD=8$ avec $J'=A*D$.

b) $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{AJ}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AD}=-8+8=0$ Donc $\overrightarrow{AJ}\perp\overrightarrow{ID}$ et par suite $(AJ)\perp(ID)$

3) a) $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{ME}=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CE}\right)=MC^2+\overrightarrow{MC}\left(\underbrace{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE}}_{\vec{0}}\right)+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}=MC^2-CD^2=MC^2-16$

b) $\overline{MD}.\overline{ME} = -7$ signifie que $MC^2 = -7+16 = 9$ d'où $MC = 3$ donc ξ est le cercle de centre C et de rayon 3.

4) a) $\overline{KD} = -\frac{1}{3}\overline{KE}$ signifie que $3\overline{KD} = -\overline{KE}$ signifie que $3\overline{KD}+\overline{KE} = \vec{0}$ Donc $K = \text{bary}\{(D;3)\text{et}(E;1)\}$

b) $3MD^2 + ME^2 = 3(\overline{MK}+\overline{KD})^2 + (\overline{MK}+\overline{KE})^2 = 3(MK^2 + 2\overline{MK}.\overline{KD} + KD^2) + MK^2 + 2\overline{MK}.\overline{KE} + KE^2$

$= 4MK^2 + 2\overline{MK}\left(\underbrace{3\overline{KD}+\overline{KE}}_{\vec{0}}\right) + 3KD^2 + KE^2 = 4MK^2 + 48 = m$ signifie que $MK^2 = \frac{m-48}{4}$;

* Si $m > 48$; $MK = \frac{\sqrt{m-48}}{2}$ d'où Γ est le cercle de centre K et de rayon $\frac{\sqrt{m-48}}{2}$.

* Si $m < 48$; $\Gamma = \varnothing$; * Si $m = 48$ alors $T = \{K\}$

Exercice 33 : 1)a) $\overline{AC} = 3\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AB}+\overline{BC} = 3\overline{AB} \Leftrightarrow \boxed{\overline{BC} = 2\overline{AB}}$(1) , $I = B*C \Rightarrow 2.\overline{BI} = \overline{BC}$ (2)

(1) et (2) $\overline{AB} = \overline{BI} \Rightarrow B = A*I$

b) $\overline{MA}.\overline{MB} + \overline{MA}.\overline{MC} = \overline{MA}.(\overline{MB}+\overline{MC}) = \overline{MA}.(2\overline{MI}) = 2\overline{MA}.\overline{MI}$

$= 2(\overline{MB}+\overline{BA}).(\overline{MB}+\overline{BI}) = 2(\overline{MB}+\overline{BA})(\overline{MB}-\overline{BA})$; $(B = A*I)$

$= 2(MB^2 - BA^2)$

2) $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{AM}.\overline{MC} \Leftrightarrow \overline{MA}.\overline{MB} + \overline{MA}.\overline{MC} = 0 \Leftrightarrow 2(MB^2 - BA^2) = 0$

$\Leftrightarrow MB^2 = BA^2 \Leftrightarrow MB^2 = BA^2 \Leftrightarrow MB = AB \Leftrightarrow M \in \zeta_{(B,AB)}$; $\zeta = \zeta_{(B,AB)}$

II)1) $MA^2 - MB^2 = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}^2 - \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}^2 = 6$

L'ensemble Δ des points M est la droite : $\boxed{x+y-3=0}$.

2) $d(B,\Delta) = \frac{|-1+2-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; $B(-1,2)$; $R = AB = \sqrt{(-2+1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = d(B,\Delta)$

Donc ζ et Δ sont tangentes. $BI = AB$ car $B = A*I$ donc $I \in \zeta$

$IA^2 - IB^2 = (2AB)^2 - AB^2 = 4AB^2 - AB^2 = 3AB^2 = 3\times 2 = 6$ Donc ζ et Δ sont tangentes en I.

$\Rightarrow I \in \Delta \Rightarrow I \in \zeta \cap \Delta$

Exercice 34 On a : $|\vec{U}.\vec{V}| \leq \|\vec{U}\|\,\|\vec{V}\|$ cette inégalité, appelée inégalité de Schwartz

soit $\vec{U}$ vecteur de coordonnées (a,a') et $\vec{V}$ vecteur de coordonnées (b,b'), cela dans une base orthonormée

$|ab+a'b'| \leq \sqrt{(a^2+a'^2)} \times \sqrt{(b^2+b'^2)} \Rightarrow (ab+a'b')^2 \leq (a^2+a'^2)\times(b^2+b'^2)$.

Exercice 35 : 1)a) $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2.AB.AD.\cos\frac{\pi}{3} = \boxed{7}$ Donc $BD = \sqrt{7}$

b) $2(AB^2+AD^2) = 2(\overline{AO}^2+\overline{OB}^2) + 2(\overline{AO}^2+\overline{OD}^2)$

$= 2\left[AO^2 + OB^2 + 2\overline{AO}.\overline{OB} + AO^2 + OD^2 + 2\overline{AO}.\overline{OD}\right] = 2\left[2AO^2 + 2OB^2 + 2\overline{AO}(\overline{OB}+\overline{OD})\right]$

$= 2\left[2\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{BD}{2}\right)^2\right] = 2\left[2\frac{AC^2}{2} + 2\frac{BD^2}{2}\right] = AC^2 + BD^2$

c) $AC = \sqrt{2(AB^2+AD^2) - BD^2} = \sqrt{2(9+4)-7} = \sqrt{19}$.

Solutions :

Exercice N°1 : 1) b) ; 2) b) ; 3) b) ; 4)a) 5) b)

6) $\det(\overline{AB},\overline{AC}) = \|\overline{AB}\|\times\|\overline{AC}\|\times\sin(\widehat{\overline{AB},\overline{AC}})$

$\overline{AB}.\overline{AC} = \|\overline{AB}\|\times\|\overline{AC}\|\times\cos(\widehat{\overline{AB},\overline{AC}}) \Rightarrow \|\overline{AB}\|\times\|\overline{AC}\| = \frac{\overline{AB}.\overline{AC}}{\cos(\widehat{\overline{AB},\overline{AC}})} = \frac{-3\sqrt{2}}{\cos(\frac{3\pi}{4})} = \frac{-3\sqrt{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6$

$\det(\overline{AB},\overline{AC}) = \|\overline{AB}\|\times\|\overline{AC}\|\times\sin(\frac{3\pi}{4}) = 6\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ 7) a) $(\widehat{\overline{MA};\overline{MB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$; b) $\widehat{BA}\setminus\{A;B\}$

Exercice n°2 : 1°/ Faux :Contre exemple $A \in [BC] \Rightarrow (\widehat{\overline{AB},\overline{AC}}) \equiv \pi[2\pi]$

2°/ Faux car $A(0,1), B(0,-1)$ *et* $M(1,0)$ on peut : $(\widehat{\overline{MA},\overline{MB}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$,.

3°/ Faux la mesure principale appartient à $]-\pi,\pi]$ *et* $-\pi \notin]-\pi,\pi]$

4°/ Vrai ; 5) Vrai ; 6) Vrai ; 7) Vrai

Exercice N° 3: a) $\alpha = \frac{15}{2}\pi = \frac{3\pi}{2} + \frac{12}{2}\pi = \frac{3\pi}{2} + 6\pi$ Donc une mesure de $\overrightarrow{AB}$ dans $[0, 2\pi[$ est $\frac{3\pi}{2}$.

b) $\alpha = \frac{57}{4}\pi = \frac{\pi}{4} + 14\pi = \frac{\pi}{4} + 2\times 7\pi = \pi + 2\times(-43)$ Donc une mesure de $\overrightarrow{AB}$ dans $[0, 2\pi[$ est $\frac{\pi}{4}$.

c) $\alpha = -\frac{171}{2}\pi = \frac{\pi}{2} - 86\pi = \frac{\pi}{2} + 2\times(-43)$ Donc une mesure de $\overrightarrow{AB}$ dans $[0, 2\pi[$ est $\frac{\pi}{2}$.

Exercice N° 4 : 1°/ D'après la relation de Chasles on a :

Mesure $\widehat{\overrightarrow{BC}}$ =mesure $\widehat{\overrightarrow{BA}}$ +mesure $\widehat{\overrightarrow{AC}}[2\pi] \equiv -$ mes $\widehat{\overrightarrow{AB}}$ +mes $\widehat{\overrightarrow{AC}}[2a] \equiv -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\equiv \frac{-4\pi}{6} + \frac{3\pi}{6}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

2°/ Rappelons que la symétrie orthogonale transforme les mesures des arcs orientés et leurs opposés : On a : $S'_{(OC)}(B) = B'$.

mes $\widehat{\overrightarrow{AB'}} \equiv$ mes $\widehat{\overrightarrow{AB}}$ + mes $\widehat{\overrightarrow{BB'}}[2\pi]$. On a mes $\widehat{\overrightarrow{CB}} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc

mes $\widehat{\overrightarrow{BB'}} \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ est par suite :

mes $\widehat{\overrightarrow{AB'}} \equiv \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc $C' = S_{(OA)}(C)$

mes $\widehat{\overrightarrow{CC'}} \equiv$ mes $\widehat{CA}$ +mes $\widehat{\overrightarrow{AC'}}[2\pi]$

$= -mes\,\widehat{\overrightarrow{AC}} + mes\,\widehat{\overrightarrow{AC'}}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv -\pi[2\pi]$

Exercice N° 5 : 1°/ Voir figure

2°) $(\widehat{\overline{OB},\overline{OC}}) \equiv (\widehat{\overline{OB},\overline{OA}}) + (\widehat{\overline{OA},\overline{OC}})[2\pi]$

$\equiv -(\widehat{\overline{OA},\overline{OB}}) + (\widehat{\overline{OA},\overline{OC}})[2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\equiv -\frac{7\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{6} - 2\pi[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

Donc la mesure principale de $(\overline{OB}\,\hat{,}\,\overline{OC})$ est $\frac{5\pi}{6}$

$(\overline{OC}\,\hat{,}\,\overline{OD}) \equiv (\overline{OC}\,\hat{,}\,\overline{OA}) + (\overline{OA}\,\hat{,}\,\overline{OD})[2\pi] \equiv -(\overline{OA}\,\hat{,}\,\overline{OC}) + (\overline{OA}\,\hat{,}\,\overline{OD})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Donc la mesure principale de $(\overline{OC}, \overline{OD})$ est $\frac{3\pi}{4}$

Exercice6: 1°/ $(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AD})[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{11\pi}{6}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{6} + 2\pi[2\pi]$

La mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est $\frac{-\pi}{6}$

$(\overrightarrow{AC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AE}) \equiv (\overrightarrow{AC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AE})[2\pi] \equiv -(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AE})[2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ La mesure principale de $(\overrightarrow{AC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AE})$ est $\frac{\pi}{6}$

2°/ $(\overrightarrow{AD}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AE}) \equiv (\overrightarrow{AD}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AE})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$

Signifie que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et par suite A , D et E sont alignés.

Exercice 7 : 1) $(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}) \equiv \frac{-23\pi}{10}[2\pi] \equiv \frac{-20-3}{10}\pi[2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{10}[2\pi]$; $(\widehat{\overline{AC};\overline{AE}}) \equiv \frac{-47\pi}{10}[2\pi] \equiv -\frac{7\pi}{10}[2\pi]$

2) $(\widehat{\overline{AB};\overline{AE}}) \equiv (\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}) + (\widehat{\overline{AC};\overline{AE}})[2\pi] \equiv \frac{-3\pi}{10}[2\pi] + \frac{-7\pi}{10}[2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{10} + \left(\frac{-7}{10}\right)[2\pi] \equiv -\pi[2\pi]$

Donc A ; B et E sont alignés.

3) $(\widehat{\overline{AC};\overline{AD}}) \equiv (\widehat{\overline{AC};\overline{AB}}) + (\widehat{\overline{AB};\overline{AD}})[2\pi] \equiv \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{10}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ Donc (AC) ⊥ (AD)

Exercice 8 : 1) $(\widehat{\overline{OA};\overline{OB}}) \equiv -\frac{59\pi}{3}[2\pi] \equiv -\frac{60\pi}{3} + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

2) a) $(\widehat{\overline{OC};\overline{OA}}) \equiv \frac{32\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

b) $(\widehat{\overline{OC};\overline{OB}}) \equiv (\widehat{\overline{OC};\overline{OA}}) + (\widehat{\overline{OA};\overline{OB}})[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$ donc O ; C et B sont alignés.

3) a) $(\widehat{\overline{OB};\overline{OD}}) \equiv -\frac{71\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

b) $(\widehat{\overline{OA};\overline{OD}}) \equiv (\widehat{\overline{OA};\overline{OB}}) + (\widehat{\overline{OB};\overline{OD}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc OAD est un triangle rectangle en O.

4) $(\widehat{\overline{MA};\overline{MB}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. Soit (AT) la tangente à (ξ) au point A tel que $(\widehat{\overline{AT};\overline{AB}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc l'ensemble **des points est l'arc** $\overrightarrow{BA}$ du cercle de centre A privé des points A et B.

Exercice 9: 1) a) $(\widehat{\overline{BC};\overline{BA}}) \equiv -\frac{35}{6}\pi[2\pi] \equiv \frac{-6\times6+1}{6}\pi[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

b) On a : $(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}) + 2(\widehat{\overline{BC};\overline{BA}}) \equiv \pi[2\pi]$ donc $(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}) \equiv \pi - \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

2) a) CA = CM ; $(\widehat{\overline{CA};\overline{CD}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$; $(\widehat{\overline{DE};\overline{DC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$; E ∈ (AC)

b) Puisque $(\widehat{\overline{DE};\overline{DC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $(\widehat{\overline{CD};\overline{CA}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\widehat{\overline{CA};\overline{CB}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc $(\widehat{\overline{BC};\overline{ED}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ d'où $(\widehat{\overline{BC};\overline{BA}})$ et $(\widehat{\overline{BC};\overline{ED}})$ deux angles correspondants et $(\widehat{\overline{BC};\overline{BA}}) \equiv (\widehat{\overline{BC};\overline{ED}})[2\pi]$ donc (AB)//(ED)

c) $(\widehat{\overline{BC};\overline{AD}}) \equiv (\widehat{\overline{BC};\overline{CA}}) + (\widehat{\overline{CA};\overline{AD}})[2\pi] \equiv \pi + (\widehat{\overline{CB};\overline{CA}}) + \pi + (\widehat{\overline{AC};\overline{AD}})[2\pi] \equiv (\widehat{\overline{CB};\overline{CA}}) + (\widehat{\overline{AC};\overline{AD}})[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

Exercice 10 : 1°/ $(\overline{AB}\,\hat{,}\,\overline{AM}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ la mesure principale de $(\overline{AB}\,\hat{,}\,\overline{AM})$ est $\frac{\pi}{6}$.

L'ensemble des points M est la demi droite passant par A privée de A tel que $(\overline{AB}\,\hat{,}\,\overline{AM}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$



2°/ $\Delta_2 = \{M \in P\ ,\ (\overline{MA}\,\hat{,}\,\overline{MB}) \equiv \pi[2\pi]\}$;

$(\overline{MA}\,\hat{,}\,\overline{MB}) \equiv \pi[2\pi]$ donc $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires de sens opposes donc .

Δ_2 est le segment [AB] privé de A et B .

3°/ $(\overline{MA}\,\hat{,}\,\overline{MB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit un point T du plan tel que $(\overline{AT}\,\hat{,}\,\overline{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ alors il existe un cercle unique passant par A et B et tangent à (AT) .

Construction :

* on trace (AT) tel que $(\overline{AT}\,\hat{,}\,\overline{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

* La perpendiculaire à (AT) passant par A est la médiatrice de [AB] se coupent au centre du cercle ζ .En fin Δ_1 est l'arc $\overrightarrow{BA}$ privé de A et B .

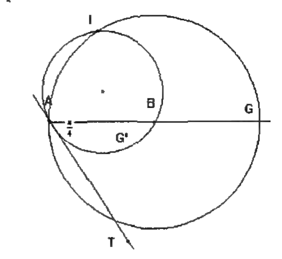
4°/ $\Delta_4 = \left\{M \in P, \frac{MA}{MB} = 3\right\}$

$\frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA = 3MB \Leftrightarrow MA^2 - 9MB^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})\ (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0$

Soit G = bary $\{(A,1)\ \ et\ \ (B,-3)\}$ et

G' = bary $\{(A\ ,1)\ \ et\ \ (B,3)\}$



$(\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB})=0 \Leftrightarrow -2\overrightarrow{MG}.4\overrightarrow{MG'}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'}=0$ D'où Δ_4 est le cercle de diamètre [GG']

Exercice 11: 1) $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF}) \equiv (\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On a EB = BF donc EBF est un triangle rectangle isocèle en B

D'où $B\hat{E}F=\frac{\pi}{4}$ et par suite $(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2) $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

On a DCE est un triangle isocéle et $D\hat{C}E=\frac{5\pi}{6} \Rightarrow D\hat{E}C=\frac{\pi}{12}$ et par suite $(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

3) $(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{ED}) \equiv (\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EB})+(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EC})+(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED})[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}[2\pi] \equiv 0\ [2\pi]$ et par suite E , F et D sont alignés.

Exercice 12: $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}) \equiv -\frac{39}{4}\pi[2\pi]$; $(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{25}{3}\pi[2\pi]$

1) $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}) \equiv -\frac{39}{4}\pi[2\pi] \equiv \frac{-4\times10+1}{4}\pi[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

$(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{25}{3}\pi[2\pi] \equiv \frac{24+1}{3}\pi[2\pi] = 8\pi+\frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}})+(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}})[2\pi] \equiv \pi+(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})+(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}})[2\pi]$

$\equiv \pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{12\pi-3\pi-4\pi}{12}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

2) a) $N=S_{(AB)}(M)$ donc AMN est isocèle en A d'où $(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN}})[2\pi]$

$Q=S_{(AC)}(H)$ donc AMQ est isocèle en A d'où $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AM}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AC}})[2\pi]$

b) $(\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AQ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AB}})+(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}})+(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}})+(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AQ}})[2\pi]$

$\equiv -(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN}})-(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}})-(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AM}})-(\widehat{\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AC}})[2\pi] \equiv -(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}})-(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}})-(\widehat{\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AC}})-(\widehat{\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AC}})[\pi]$

$\equiv -2(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}})-2(\widehat{\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AC}})[2\pi] \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}})+2(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AQ}})[2\pi] \equiv 2\left[(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}})+(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AQ}})\right][2\pi]$

$\equiv 2\left[(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}})+(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}})\right][2\pi] \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})[2\pi]$ (On a $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AQ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}})[2\pi]$)

c) Puisque $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$ alors $(\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AQ}}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

d) $2(\widehat{\overrightarrow{NQ};\overrightarrow{NA}})+(\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AQ}}) \equiv \pi[2\pi]$; ANQ est isocèle en A. ; $2(\widehat{\overrightarrow{NQ};\overrightarrow{NA}}) \equiv \pi-(\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AQ}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

D'où $(\widehat{\overrightarrow{NQ};\overrightarrow{NA}}) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

3) a) $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}}) \equiv \alpha[2\pi]$; $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AB}})[2\pi] \equiv (\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{BC}})+(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB}})[2\pi]$;

$(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AN}})+(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}})[2\pi] \equiv \pi+(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{NA}})+(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}})[2\pi]$

Donc $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{NA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}})-(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}})-\pi[2\pi]$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}})-\left((\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})+\pi\right)-\pi[2\pi] \equiv (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}})-(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})-2\pi[2\pi] \equiv (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}})-(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})[2\pi]$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}})+(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}})[2\pi] \equiv -\alpha+\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{NQ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{NA}})+(\widehat{\overrightarrow{NA};\overrightarrow{NQ}})[2\pi] \equiv -\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}[2\pi] \equiv -\alpha+\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

$(BC)//(NQ)$ si et seulement si $-\alpha+\frac{\pi}{6}=k\pi \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}+k'\pi$. avec $k' \in \mathbb{Z}$

Exercice 13 : 1) on a O ∈ med ([BC)]

Sig BOC est un triangle isocèle sig $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}) \equiv (\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB})[2\pi]$

Sig $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}) \equiv (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ (car O ∈ [AC])

2) On a $\begin{cases}\text{ABC un triangle rectangle}\\ I=B*C\end{cases} \Rightarrow$ BI = AI Donc ABI est un triangle isocèle

De plus on a $(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ (car I ∈ [BC])et par suite ABI est un triangle équilatéral.

3/ a) $(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA}) \equiv (\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA})[2\pi]$

On a ABI est équilatéral sig que $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : $(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA}) \equiv -\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

b) on a $\begin{cases}ID=IA\\ et\\ (\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IA}) \equiv 2(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA})[2\pi]\end{cases}$ eq a $\begin{cases}ID=IA\\ et\\ (\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ D'où DIA est équilatéral

On a DA = DI = IA
AI = AB = BI et par suite DA = DI = AB = BI Ce qui donne que ABID est un losange.

Exercice 14 : $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

1) $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}) \equiv -\frac{119}{12}\pi[2\pi]$; $(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OE}}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

a) $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}) \equiv -\frac{119}{12}\pi[2\pi] \equiv \frac{-120+1}{12}\pi[2\pi] \equiv -10\pi+\frac{\pi}{12}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$ d'où la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}})$ est $\frac{\pi}{12}$

b)

2) On a $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}})$ angle au centre et $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}})$ angle inscrit donc

$(\widehat{\overline{BA};\overline{BD}}) \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\overline{OA};\overline{OD}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

$(\widehat{\overline{OC};\overline{OD}}) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi] \Rightarrow (\widehat{\overline{CO};\overline{DO}}) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$ et On a $(\widehat{\overline{DB};\overline{DO}}) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi] \Rightarrow (\widehat{\overline{CO};\overline{DO}}) \equiv (\widehat{\overline{DB};\overline{DO}})[2\pi]$ donc $(DB)//(OC)$

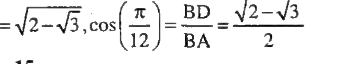
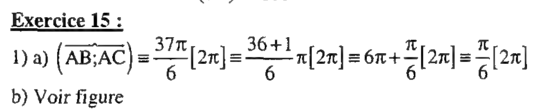
3) $(\widehat{\overline{OA};\overline{OF}}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et DF = 2 ; on a $(\widehat{\overline{OA};\overline{OE}}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $(\widehat{\overline{OA};\overline{OF}}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc $F \in (OA)$ et puisque OE = 1 et OF = 2 Donc $E = O * F$

4) a) $(\widehat{\overline{OE};\overline{OD}}) \equiv (\widehat{\overline{OE};\overline{OA}}) + (\widehat{\overline{OA};\overline{OD}})[2\pi] \equiv (\widehat{\overline{OE};\overline{OC}}) - (\widehat{\overline{OA};\overline{OC}}) + (\widehat{\overline{OA};\overline{OD}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) On a $E = O * F$ et $(\widehat{\overline{OE};\overline{OD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ signifie $OE = ED$ *donc ODF est un triangle rectangle en D signifie* que $(OD) \perp (DF)$ signifie que (DF) est tangent à ζ

5) a) D'après E-Kashi dans OAD on a : $AD^2 = OD^2 + OA^2 - 2OA.OD\cos\frac{\pi}{6} = OD^2 + OA^2 - OA.OD\sqrt{3}$

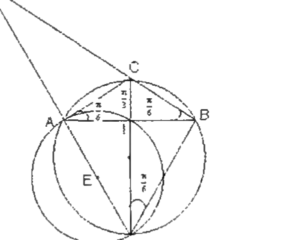
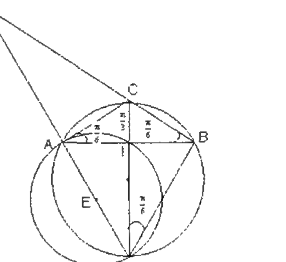



signifie que $OA.OD = \frac{OD^2 + OA^2 - AD^2}{\sqrt{3}}$.

$\overline{OA}.\overline{OD} = OA.OD.\cos\frac{\pi}{6} = OA.OD.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OD^2 + OA^2 - AD^2}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OD^2 + OA^2 - AD^2}{2}$

$\overline{OA}.\overline{OD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ signifie que $OD^2 + OA^2 - AD^2 = \sqrt{3}$; $AD = \sqrt{OD^2 + OA^2 + \sqrt{3}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

5)b) $BD = \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{BD}{BA} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

Exercice 15 :

1) a) $(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}) \equiv \frac{37\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{36+1}{6}\pi[2\pi] \equiv 6\pi + \frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

b) Voir figure

2) a) $(\widehat{\overline{BA};\overline{BD}}) \equiv \frac{-95\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{-96+1}{3}\pi[2\pi] \equiv -32\pi + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) $(\widehat{\overline{AB};\overline{CD}}) \equiv (\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}) + (\widehat{\overline{AC};\overline{CD}})[2\pi]$

$\equiv (\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}) + (\widehat{\overline{CA};\overline{CD}}) + \pi[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi[2\pi] \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi] \quad \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $(AB) \perp (CD)$

3) $E = A * D$

a) On a : AID un triangle rectangle en I et $E = A * D$ donc $EI = EA$ et par suite EIA est isocèle en E.

b) On a I est le centre du cercle circonscrit à ADI donc $(\widehat{\overline{EI};\overline{ED}}) \equiv 2(\widehat{\overline{AI};\overline{AD}})[2\pi] \equiv 2(\widehat{\overline{AB};\overline{AD}})[2\pi]$

4) a) $(\widehat{\overline{EI};\overline{BC}}) \equiv (\widehat{\overline{EI};\overline{ED}}) + (\widehat{\overline{ED};\overline{BC}})[2\pi] \equiv 2(\widehat{\overline{AB};\overline{AD}}) + (\widehat{\overline{ED};\overline{BC}})[2\pi]$

$\equiv (\widehat{\overline{AB};\overline{AD}}) + (\widehat{\overline{AB};\overline{AD}}) + (\widehat{\overline{ED};\overline{BC}})[2\pi] \equiv (\widehat{\overline{AB};\overline{AD}}) + (\widehat{\overline{AB};\overline{ED}}) + (\widehat{\overline{ED};\overline{BC}})[2\pi]$ (car $\overline{AD}$ et $\overline{ED}$ sont colinéaires de même sens) $\equiv (\widehat{\overline{AB};\overline{AD}}) + (\widehat{\overline{AB};\overline{BC}})[2\pi] \equiv (\widehat{\overline{AB};\overline{AD}}) + (\widehat{\overline{BA};\overline{BC}}) + \pi[2\pi]$

b)Or A ; B ; C et D sont quatre points distincts de ξ

$(\widehat{\overline{AC};\overline{AD}}) \equiv (\widehat{\overline{BC};\overline{BD}}) + \pi[2\pi] \Leftrightarrow (\widehat{\overline{AC};\overline{AB}}) + (\widehat{\overline{AB};\overline{AD}}) \equiv (\widehat{\overline{BC};\overline{BA}}) + (\widehat{\overline{BA};\overline{BD}}) + \pi[2\pi]$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + (\widehat{\overline{AB};\overline{AD}}) \equiv (\widehat{\overline{BC};\overline{BA}}) + \frac{\pi}{3} + \pi[2\pi] \Leftrightarrow (\widehat{\overline{AB};\overline{AD}}) - (\widehat{\overline{BC};\overline{BA}}) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\widehat{\overline{AB};\overline{AD}}) + (\widehat{\overline{BA};\overline{BC}}) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow (\widehat{\overline{EI};\overline{BC}}) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ Les deux droites (EI) et (BC) sont perpendiculaires

Exercice 16 : 1) Soit T un point du plan tel que $(\widehat{\overline{AT};\overline{AB}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et ξ le cercle passant par A et B et tangente à (AT) en A. (Γ) est l'arc orienté $\overrightarrow{BA}$ privé de A et B puisque $\frac{\pi}{6} \in]0;\pi[$

2) Soit T' un point tel que $(\widehat{\overline{AT'};\overline{AB}}) \equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ Comme

$(\widehat{\overline{AT};\overline{AT'}}) \equiv (\widehat{\overline{AT};\overline{AB}}) + (\widehat{\overline{AB};\overline{AT'}})[2\pi]$ Alors

$(\widehat{\overline{AT};\overline{AT'}}) \equiv \pi[2\pi]$ Ainsi le cercle ξ passe par A et B et il est tangent à (AT') en A et par suite (Γ') est l'arc $\overrightarrow{AB}$ privé de A et B (puisque $-\pi < -\frac{5\pi}{6} < 0$)

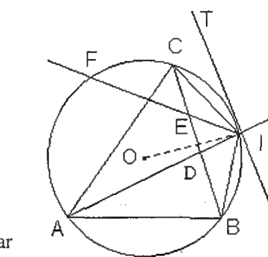
3) Remarquons que pour tout entier k ; il existe un entier k' tel que $k = 2k'$ ou $k = 2k'+1$ c'est-à-dire $k\pi = 2k'\pi$ ou $k\pi = 2k'\pi + \pi$. Soit M un point du plan ; $M \in E \Leftrightarrow (\widehat{\overline{MA};\overline{MB}}) = \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (\widehat{\overline{MA};\overline{MB}}) = \frac{\pi}{6} + 2k'\pi; k' \in \mathbb{Z}$ ou $(\widehat{\overline{MA};\overline{MB}}) = \frac{\pi}{6} + \pi + 2k'\pi; k' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\widehat{\overline{MA};\overline{MB}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou

$(\widehat{\overline{MA};\overline{MB}}) \equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow M \in \Gamma$ ou $M \in \Gamma'$ donc $E = (\Gamma) \cup (\Gamma') = \xi \setminus \{A;B\}$

Exercice 17 : : 1) $[AI)$ est la bissectrice intérieur de $[AB;AC]$

Alors $(\widehat{\overline{AB};\overline{AI}}) \equiv (\widehat{\overline{AI};\overline{AC}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ (I)



A et B sont deux points du même arc orienté $\overrightarrow{CI}$

$\Rightarrow (\widehat{\overline{AI};\overline{AC}}) \equiv (\widehat{\overline{BI};\overline{BC}})[2\pi]$ (II)

A et C sont deux points du même arc orienté $\overrightarrow{IB}$

$\Rightarrow (\widehat{\overline{AB};\overline{AI}}) \equiv (\widehat{\overline{CB};\overline{CI}})[2\pi]$ (III)

De (I);(II) et (III) On déduit que $(\widehat{\overline{BI};\overline{BC}}) \equiv (\widehat{\overline{CB};\overline{CI}})[2\pi]$ et par

suite le triangle BCI est isocèle de sommet I

2) a) Soit T un point de Δ ; $(\widehat{\overline{IT};\overline{BC}}) \equiv (\widehat{\overline{IT};\overline{IB}}) + (\widehat{\overline{IB};\overline{BC}})[2\pi]$

* $(\widehat{\overline{IB};\overline{BC}}) \equiv \pi + (\widehat{\overline{BI};\overline{BC}})[2\pi] \equiv \pi + (\widehat{\overline{AI};\overline{AC}})[2\pi] \equiv \pi + \frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$

* $2(\widehat{\overline{IT};\overline{IB}}) \equiv (\widehat{\overline{OI};\overline{OB}})[2\pi]$ or on a : $(\widehat{\overline{OI};\overline{OB}}) \equiv 2(\widehat{\overline{AI};\overline{AB}})[2\pi] \equiv 2\left(-\frac{\pi}{6}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Rightarrow 2(\widehat{\overline{IT};\overline{IB}}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ Ainsi $2(\widehat{\overline{IT};\overline{BC}}) \equiv 2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv 0[2\pi] \Rightarrow (\widehat{\overline{IT};\overline{BC}}) = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ les droites (IT) et (BC) sont parallèles.

b) $\overline{FE}$ et $\overline{FI}$ sont colinéaires et de même sens ; $\Rightarrow (\widehat{\overline{FE};\overline{FA}}) \equiv (\widehat{\overline{FI};\overline{FA}})[2\pi]$ (I)

Les vecteurs $\overline{DE}$ et $\overline{IT}$ sont colinéaires ; mais on ne sait pas s'ils sont de même sens ou non puisque T est un point quelconque de Δ donc $(\widehat{\overline{DE};\overline{DA}}) \equiv (\widehat{\overline{IT};\overline{IA}})[2\pi]$ ou $(\widehat{\overline{DE};\overline{DA}}) \equiv \pi + (\widehat{\overline{IT};\overline{IA}})[2\pi]$

$2(\widehat{\overline{DE};\overline{DA}}) \equiv 2(\widehat{\overline{IT};\overline{IA}})[2\pi]$ (II), or (IT) est la tangente à ξ en I. F et A sont deux points de ξ

$\Rightarrow (\widehat{\overline{OI};\overline{OA}}) \equiv 2(\widehat{\overline{IT};\overline{IA}})[2\pi]$ de plus $(\widehat{\overline{OI};\overline{OA}}) \equiv 2(\widehat{\overline{FI};\overline{FA}})[2\pi]$

De (I) et (II) $\Rightarrow 2(\widehat{\overline{DE};\overline{DA}}) \equiv 2(\widehat{\overline{FE};\overline{FA}})[2\pi] \Rightarrow 2(\widehat{\overline{DE};\overline{DA}}) = 2(\widehat{\overline{FE};\overline{FA}}) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$(\widehat{\overline{DE};\overline{DA}}) = (\widehat{\overline{FE};\overline{FA}}) + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Exercice 18 Rappel : Soit ξ un cercle. I ; J ; K et L quatre points distincts de ξ.

Si K et L appartiennent à l'arc orienté $\overrightarrow{IJ}$ alors $(\widehat{\overline{KI};\overline{KJ}}) \equiv (\widehat{\overline{LI};\overline{LJ}})[2\pi]$.

Si K appartient à l'arc orienté $\overrightarrow{IJ}$ et L appartient à l'arc orienté $\overrightarrow{JI}$ $\Rightarrow (\widehat{\overline{KI};\overline{KJ}}) \equiv (\widehat{\overline{LI};\overline{LJ}}) + \pi[2\pi]$.

Remarque : On peut résumer les deux cas par l'écriture suivante $2(\widehat{\overline{KI};\overline{KJ}}) \equiv 2(\widehat{\overline{LI};\overline{LJ}})[2\pi]$

On a : $(\widehat{\overline{MN};\overline{M'N'}}) \equiv (\widehat{\overline{MN};\overline{MA}}) + (\widehat{\overline{MA};\overline{M'N'}})[2\pi]$.

B est un point de ξ alors : $2(\widehat{\overline{MN};\overline{MA}}) \equiv 2(\widehat{\overline{BN};\overline{BA}})[2\pi]$

Les vecteurs $\overline{MA}$ et $\overline{M'A}$ sont colinéaires

$\Rightarrow 2(\widehat{\overline{MA};\overline{M'N'}}) \equiv 2(\widehat{\overline{M'A};\overline{M'N'}})[2\pi]$

Or $B \in \xi'$ $\Rightarrow 2(\widehat{\overline{M'A};\overline{M'N'}}) \equiv 2(\widehat{\overline{BA};\overline{BN'}})[2\pi]$.

$\Rightarrow 2(\widehat{\overline{MN};\overline{M'N'}}) \equiv 2(\widehat{\overline{BN};\overline{BA}}) + 2(\widehat{\overline{BA};\overline{BN'}})[2\pi] \equiv 2(\widehat{\overline{BN};\overline{BN'}})[2\pi] \equiv 0[2\pi]$

$\Rightarrow 2(\widehat{\overline{MN};\overline{M'N'}}) \equiv 0[2\pi]$ ce qui prouve que les vecteurs $\overline{MN}$ et $\overline{M'N'}$ sont colinéaires

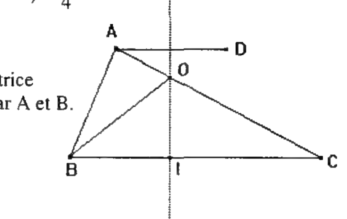
$\Rightarrow (MN)$ et $(M'N')$ sont parallèles.

Exercice 19 : * $MA^2 - 4MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = 0$

Soit G = bary $\{(A,1)\ ,\ (B,-2)\}$ et G' = bary $\{(A,1)\ ,(B,2)\}$

Donc ζ_1 est un cercle de diamètre [GG']

$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Soit T un point du plan tel que $(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$



Donc ζ_2 est l'arc $\overset{\frown}{BA}$ privé de A et B .
Construction :
* La perpendiculaire à (AT) passant par A coupe la médiatrice de [AB] en un point O qui est le centre du cercle passant par A et B.

2) $\overline{IA}.\overline{IB} = IA.IB\cos\frac{\pi}{4} = IA.IB\frac{\sqrt{2}}{2} = 2IB.IB\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.IB^2$

3) $\|\overline{IA} - \overline{IB}\|^2 = \|\overline{BA}\|^2 = 36$. D'autre part

$\|\overline{IA} - \overline{IB}\|^2 = IA^2 + IB^2 - 2\overline{IA}.\overline{IB} \Rightarrow IA^2 + IB^2 - 2\sqrt{2}IB^2 = 36 \Rightarrow 4IB^2 + IB^2 - 2\sqrt{2}IB^2 = 36$

$(5 - 2\sqrt{2})IB^2 = 36 \Rightarrow IB = \frac{6}{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}$ et $IA = \frac{12}{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}$

4) $\overline{IA}.\overline{IB} = \frac{36\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}$

Exercice 20:

1)Soit T un point de la tangente commune à ξ et ξ' en A. alors $(\widehat{\overline{OA};\overline{OB}}) \equiv 2(\widehat{\overline{AT};\overline{AB}})[2\pi]$ et $(\widehat{\overline{O'A};\overline{O'B'}}) \equiv 2(\widehat{\overline{AT};\overline{AB'}})[2\pi]$

Or $\overline{AB}$ et $\overline{AB'}$ sont deux vecteurs colinéaires et de sens contraire

$\Rightarrow (\widehat{\overline{AT};\overline{AB}}) \equiv (\widehat{\overline{AT};\overline{AB'}}) + \pi[2\pi]$ et

$2(\widehat{\overline{AT};\overline{AB}}) \equiv 2(\widehat{\overline{AT};\overline{AB'}})[2\pi]$

$\Rightarrow (\widehat{\overline{OA};\overline{OB}}) \equiv (\widehat{\overline{O'A};\overline{O'B'}})[2\pi]$ (I)

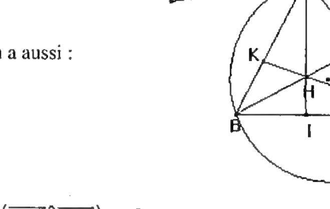
2) ona : $(\widehat{\overline{OA};\overline{OB}}) \equiv (\widehat{\overline{O'A};\overline{O'B'}})[2\pi]$; et comme $(OA) \perp \Delta$ et $(AO') \perp \Delta$ alors A ;O et O'sont alignés et comme $\overline{OA}$ et $\overline{O'A}$ sont de sens contraire, $\Rightarrow (\widehat{\overline{OA};\overline{OB}}) \equiv (\widehat{\overline{O'A};\overline{OB}}) + \pi[2\pi]$ (II) De (I) et (II) on conclut que $(\widehat{\overline{O'A};\overline{O'B'}}) \equiv (\widehat{\overline{O'A};\overline{OB}}) + \pi[2\pi] \Leftrightarrow (\widehat{\overline{O'B};\overline{OB'}}) \equiv \pi[2\pi]$ .Donc : Les vecteurs $\overline{OB}$ et $\overline{O'B'}$ sont colinéaires (on peut préciser de plus qu'ils sont de sens contraire).Par suite les droites (OB) et $(O'B')$ sont parallèles.

Exercice 21 : 1)a) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}})[2\pi]$ Dans le triangle ABI on a :

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}}) + (\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}) \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow$

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right)\equiv\pi-\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}\right)-\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)[2\pi]\equiv\pi+\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BI}\right)+\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}\right)[2\pi]$

$\equiv\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)+\frac{\pi}{2}[2\pi]$



b) Soit Δ une tangente a ζ en A et T ∈ Δ
d'après la propriété de la tangente on a :

$2\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$ Et on a aussi :

$2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AT}\right)\equiv2\times\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv\pi[2\pi]$

$2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)+\pi[2\pi]$

$\equiv2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AC}\right)+2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AT}\right)[2\pi]\equiv2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

On obtient donc : $2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

2) a/ BCJ un triangle rectangle en J donc J appartient au cercle de diamètre [BC]
CKB un triangle rectangle en K donc K appartient au cercle de diamètre [BC]
On déduit donc que B ; C ; K ; J sont situés sur un même cercle de diamètre [BC]
b/ on a (OA) ⊥ Δ danc il suffit de montrer que (JK) // Δ

$\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{JC}\right)[2\pi]$

J , K , B , C appartiennent à un même cercle donc : $2\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{JC}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BC}\right)[2\pi]$

Ainsi $2\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{AC}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BC}\right)[2\pi]\equiv2\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)[2\pi]\equiv2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

On obtient $2\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{AC}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]\Leftrightarrow2\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{AC}\right)+2\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AT}\right)\equiv0[2\pi]$

$\Leftrightarrow2\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{AT}\right)\equiv0[2\pi]\Leftrightarrow2\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{AT}\right)=0+2k\pi\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{AT}\right)=k\pi\Leftrightarrow\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{AT}$ sont colinéaires

et par suite (JK) // Δ
Aussi on a : (OA) ⊥ Δ
(JK) // Δ Alors (OA) ⊥ (JK)

3) ICA un triangle rectangle en I signifie I appartient au cercle de diamètre [AC]
A C K un triangle rectangle en K signifie K appartient au cercle de diamètre [AC]
Alors A , C , I , K appartiennent à un même cercle
JHC et HIC sont deux triangle rectangles de même hypoténuse [HC] donc I , J , H , C appartienent à un même cercle de diamètre [HC] on a donc :

$2\left(\overrightarrow{IK},\overrightarrow{IA}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{CK},\overrightarrow{CA}\right)[2\pi]\equiv2\left(\overrightarrow{CH},\overrightarrow{CJ}\right)[2\pi]$ *car* $H\in[CK]$ *et* $J\in[CA]$

$\equiv2\left(\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IJ}\right)[2\pi]\equiv2\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IJ}\right)[2\pi]$ *car* $H\in[IA]\Rightarrow2\left(\overrightarrow{IK},\overrightarrow{IA}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IJ}\right)[2\pi]$

Exercice 22 : 1)on a : $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\Rightarrow2\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)\equiv\pi[2\pi]$. Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont **colinéaires ainsi que les vecteurs** $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{NB}$. $\Rightarrow2\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}\right)\equiv2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{NB}}\right)[2\pi]$. Or

$\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{NB}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{NO}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{NO};\overrightarrow{NB}}\right)[2\pi]$, de plus $\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right)+2\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\pi[2\pi]$;

$\left(\widehat{\overrightarrow{NO};\overrightarrow{NB}}\right)+2\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{ON}}\right)\equiv\pi[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{NO}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)[2\pi]$

$\Rightarrow2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{NB}}\right)\equiv-4\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}\right)-4\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{ON}}\right)+\pi[2\pi]\equiv-4\left[\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}\right)+\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{ON}}\right)\right]+\pi[2\pi]$

$\equiv-4\left[\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)+\pi\right]+\pi[2\pi]\equiv-2\times2\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)+\pi[2\pi]\equiv\pi[2\pi]\Rightarrow2\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}\right)\equiv\pi[2\pi]$

2) $2\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}\right)\equiv\pi[2\pi]\Rightarrow2\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}\right)=\pi+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$.

Comme pour tout $k\in\mathbb{Z}$; il existe un entier $k'\in\mathbb{Z}$ tel que $k=2k'$ ou $k=2k'+1$

On déduit que $\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Don I varie sur le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

Exercice 23 : 1/ a) A'MC et B'MC sont deux triangles rectangles de même hypoténuse [MC]
A' appartient au cercle de diamètre [MC] .
B' appartient au cercle de diamètre [MC] .
Donc A' , B' , M et C appartiennent à un même cercle.
b) On a A' , B' , M et C appartiennent à une cercle donc :

$\left(\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'M}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA'},\overrightarrow{CM}\right)[2\pi]$ (Angles interceptant le même arc

Signifie $\left(\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'M}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA'},\overrightarrow{CM}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CM}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)[2\pi]$ (car A' ∈ [CB])

(Car A, B, M et C ∈ ζ)

2/a) MAC' et MAB' sont deux triangle de même hypoténuse [AM] .
B' et C' appartiennent à un cercle de diamètre [AM]
D'où A , M , B' et C' appartiennent à un même cercle de diamètre [AM]

b) On a : $\left(\overrightarrow{B'M},\overrightarrow{B'C'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC'}\right)[2\pi]$ (angle interceptant le même arc)

$\equiv\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$ car C' ∈ [AB]

3)On a $\left(\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'M}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{B'M},\overrightarrow{B'C'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$ Donc

$\left(\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'M}\right)+\left(\overrightarrow{B'M},\overrightarrow{B'C'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$ Signifie

$\left(\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]\equiv0[2\pi]\Rightarrow\overrightarrow{B'A'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont colinéaires A' , B' et C' sont alignés.

Exercice 24:

1) a) $2\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BP}\right)+2\left(\overrightarrow{BP};\overrightarrow{BM}\right)[2\pi]$ or $2\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BP}\right)\equiv\left(\overrightarrow{O'B};\overrightarrow{O'P}\right)[2\pi]$ (car (BA) est tangent à ξ' en B et $2\left(\overrightarrow{BP};\overrightarrow{BM}\right)\equiv\left(\overrightarrow{O'P};\overrightarrow{O'M}\right)[2\pi]$ (Angle inscrit et angle de centre)

Donc $2\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM}\right)\equiv\left(\overrightarrow{O'B};\overrightarrow{O'P}\right)+\left(\overrightarrow{O'P};\overrightarrow{O'M}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{O'B};\overrightarrow{O'M}\right)[2\pi]\equiv2\left(\overrightarrow{PB}:\overrightarrow{PM}\right)[2\pi]$

b) $2\left(\overrightarrow{PC};\overrightarrow{PM}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CM}\right)[2\pi]$ car $2\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CM}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CP}\right)+2\left(\overrightarrow{CP};\overrightarrow{CM}\right)[2\pi]$

$\equiv(\overline{O''C};\overline{O''P})+(\overline{O''P};\overline{O''M})[2\pi]\equiv(\overline{O''C};\overline{O''M})[2\pi]\equiv 2(\overline{PC};\overline{PM})[2\pi]$

Or $(\overline{CA};\overline{CM})\equiv(\overline{BA};\overline{BM})[2\pi]\Leftrightarrow 2(\overline{PC};\overline{PM})\equiv 2(\overline{PB};\overline{PM})[2\pi]\Leftrightarrow 2(\overline{PC};\overline{PM})-2(\overline{PB};\overline{PM})\equiv 0[2\pi]$.

$\Leftrightarrow 2(\overline{PC};\overline{PB})\equiv 0[2\pi]\Leftrightarrow 2(\overline{PC};\overline{PB})=0+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(\overline{PC};\overline{PB})=k\pi\Leftrightarrow$ P ; C et B sont alignés.

2) a) On a $(\overline{BC};\overline{BA})\equiv(\overline{CA};\overline{CB})[2\pi]$ car ABC est un triangle isocèle en A et on a .

$(\overline{MA};\overline{MB})\equiv(\overline{CA};\overline{CB})+\pi[2\pi]\Leftrightarrow 2(\overline{MA};\overline{MB})\equiv 2(\overline{CA};\overline{CB})[2\pi]\Leftrightarrow 2(\overline{MA};\overline{MB})\equiv 2(\overline{BC};\overline{BA})[2\pi]$

b) $2(\overline{BA};\overline{BP})\equiv 2(\overline{MB};\overline{MP})[2\pi]$ (Angle inscrit) Or $2(\overline{MA};\overline{MP})\equiv 2(\overline{MA};\overline{MB})+2(\overline{MB};\overline{MP})[2\pi]$

$\equiv 2(\overline{BC};\overline{BA})+2(\overline{BA};\overline{BP})[2\pi]\equiv 2(\overline{BC};\overline{BP})[2\pi]\equiv 0[2\pi]\Leftrightarrow 2(\overline{MP};\overline{MB})=0+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow(\overline{MA};\overline{MP})=k\pi$ Donc M ; A et P sont alignés.

Exercice 25 : $(\overline{AB};\overline{AC})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$; $AB=3$; $I=A*B$

1) a) On a : $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=\vec{0}$ signifie que $\overline{GA}+\overline{GI}+\overline{IB}+\overline{GI}+\overline{IC}=\vec{0}$ signifie que $\overline{GA}+2\overline{GI}+\underbrace{\overline{IB}+\overline{IC}}_{\vec{0}}=\vec{0}$ signifie que $\overline{GA}+2\overline{GI}=\vec{0}$ donc $G=\text{bary}\{(A;1);(I;2)\}$.

b) $MA^2+2MI^2=\frac{27}{2}$ signifie que $3MG^2+2\overline{MG}\Big(\underbrace{\overline{GA}+2\overline{GI}}_{\vec{0}}\Big)+GA^2+2GI^2=\frac{27}{2}$ signifie que

$3MG^2+GA^2+2GI^2=\frac{27}{2}$ signifie que $3MG^2+3+\frac{2\times3}{4}=\frac{27}{2}$ signifie que $3MG^2=\frac{27}{2}-\frac{9}{2}=\frac{18}{2}=9$

Donc $MG=\sqrt{3}$, $GA^2=\frac{4}{9}\times\frac{27}{4}=3$; $GI^2=\frac{1}{9}\times\frac{27}{4}=\frac{3}{4}$; $AI^2=9-\frac{9}{4}=\frac{27}{4}\Leftrightarrow AI=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ donc $GA=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$MO=AO=BO=CO=\sqrt{3}$ donc l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2+2MI^2=\frac{27}{2}$ est le cercle circonscrit à ABC.

2) $(\overline{MA};\overline{MC})\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]\Leftrightarrow(\overline{MA};\overline{MC})\equiv(\overline{BA};\overline{BC})[2\pi]$ donc Γ et l'arc $\widehat{AC}$ privé de A et C.

3) a) $\frac{1}{2}\overline{NA}.\overline{BC}=\overline{NI}.\overline{CB}$ signifie que $\frac{1}{2}\overline{NA}.\overline{BC}-\overline{NI}.\overline{CB}=0$ signifie que $\frac{1}{2}\overline{NA}.\overline{BC}+\overline{NI}.\overline{BC}=0$ signifie que

$\overline{BC}\Big(\frac{1}{2}\overline{NA}+\overline{NI}\Big)=0\Leftrightarrow\overline{BC}(\overline{NA}+2\overline{NI})=0\Leftrightarrow\overline{BC}(\overline{NG}+\overline{GA}+2\overline{NG}+2\overline{GI})=0\Leftrightarrow\overline{BC}(\overline{NG})=0$

$\Leftrightarrow$ N est un point de de la droite perpendiculaire à(BC) passant par G $\Leftrightarrow N\in(AI)\cap(\Gamma)$

b) $(\overline{NB};\overline{NC})\equiv-2(\overline{NA};\overline{NC})[2\pi]$ car (AN) est la médiatrice de [BC] et comme $N\in\Gamma$

$(\overline{NB};\overline{NC})\equiv-\frac{2}{3}\pi[2\pi]$

Exercice 26 : 1)a/ $(\overline{CB}\,\hat{,}\,\overline{CA})$ est un angle inscrit dans le cercle ζ associé à l'angle $(\overline{OB}\,\hat{,}\,\overline{OA})$

Donc $2(\overline{CB}\,\hat{,}\,\overline{CA})\equiv(\overline{OB}\,\hat{,}\,\overline{OA})[2\pi]$ (I). D'autre part on a :

$\begin{cases}OA=OB\\ O'A=O'B\end{cases}\Rightarrow(OO')\equiv méd([AB])$

Dans le triangle isocèle BOA on a : $2(\overline{OB}\,\hat{,}\,\overline{OO'})\equiv(\overline{OB}\,\hat{,}\,\overline{OA})[2\pi]$ (II)

(I) et (II) : $2(\overline{CB}\,\hat{,}\,\overline{CA})\equiv 2(\overline{OB}\,\hat{,}\,\overline{OO'})[2\pi]$

b) Dans le triangle BCD on a : $(\overline{BC}\,\hat{,}\,\overline{BD})+(\overline{CD}\,\hat{,}\,\overline{CB})+(\overline{DB}\,\hat{,}\,\overline{DC})\equiv\pi[2\pi]\Leftrightarrow$

$(\overline{BC}\,\hat{,}\,\overline{BD})\equiv\pi+(\overline{CB}\,\hat{,}\,\overline{CD})+(\overline{DC}\,\hat{,}\,\overline{DB})[2\pi]\equiv\pi+(\overline{CB}\,\hat{,}\,\overline{CA})+(\overline{DA}\,\hat{,}\,\overline{DB})[2\pi]$ car $A\in[DC]$

$\Rightarrow 2(\overline{BC}\,\hat{,}\,\overline{BD})\equiv 2(\overline{OB}\,\hat{,}\,\overline{OO'})+2(\overline{DA}\,\hat{,}\,\overline{DB})[2\pi]$

$\equiv 2(\overline{OB}\,\hat{,}\,\overline{OO'})+(\overline{O'A}\,\hat{,}\,\overline{O'B})[2\pi]\equiv 2(\overline{OB}\,\hat{,}\,\overline{OO'})+2(\overline{O'O}\,\hat{,}\,\overline{O'B})[2\pi]$

$\equiv 2(\overline{OB}\,\hat{,}\,\overline{OO'})+2\big((\overline{OO'}\,\hat{,}\,\overline{O'B})+\pi\big)[2\pi]\equiv 2(\overline{OB}\,\hat{,}\,\overline{O'B})[2\pi]\equiv 2(\overline{BO}\,\hat{,}\,\overline{BO'})[2\pi]\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

2) a/ [CC'] est un diamètre de ζ donc $(AC')\perp(AC)$

[DD'] est un diamètre de ζ' donc $(AD')\perp(AD)$

Puisque A , C et D sont alignés alors (AC') // (AD') et par suite A , C' et D' sont alignés.

b/ $(\overline{C'C}\,\hat{,}\,\overline{D'D})\equiv(\overline{C'C}\,\hat{,}\,\overline{C'A})+(\overline{C'A}\,\hat{,}\,\overline{D'D})[2\pi]\equiv(\overline{C'C}\,\hat{,}\,\overline{C'A})+(\overline{D'A}\,\hat{,}\,\overline{D'D})[2\pi]$

(*car* $\overline{C'A}$ *et* $\overline{D'A}$ *sont colinéaires de même sens*).

C' , C , A et B sont situés sur le même cercle alors : $2(\overline{C'C}\,\hat{,}\,\overline{C'A})\equiv 2(\overline{BC}\,\hat{,}\,\overline{BA})[2\pi]$

A , D' , D , et B sont situés sur le même cercle alors : $2(\overline{D'A}\,\hat{,}\,\overline{D'D})\equiv 2(\overline{BA}\,\hat{,}\,\overline{BD})[2\pi]$

Donc $2(\overline{C'C}\,\hat{,}\,\overline{D'D})\equiv 2(\overline{BC}\,\hat{,}\,\overline{BA})+2(\overline{BA}\,\hat{,}\,\overline{BD})[2\pi]$

$\equiv 2(\overline{BC}\,\hat{,}\,\overline{BD})[2\pi]\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

3) Il suffit de montrer que $2(\overline{EO}\,\hat{,}\,\overline{EO'})\equiv 2(\overline{BO}\,\hat{,}\,\overline{BO'})[2\pi]$

1er cas : si E = O ou E = O' alors E ∈ (Γ) ; 2ème cas : si E ≠ O et E ≠ O'

$2(\overline{EO}\,\hat{,}\,\overline{EO'})\equiv 2(\overline{C'C}\,\hat{,}\,\overline{D'D})[\pi]\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ (*car* $\overline{EO}$ *et* $\overline{C'C}$ *sont colinéaires* ; $\overline{EO'}$ *et* $\overline{D'D}$ *sont colinéaires*)

Donc E appartient à l'ensemble suivant : $\Gamma=\Big\{M\in P\ ;\ (\overline{MO}\,\hat{,}\,\overline{MO'})\equiv\frac{2\pi}{3}[\pi]\Big\}$

Donc $\Gamma=\zeta''/\{O\ ,\ O'\}$ Avec ζ'' un cercle passant par O et O'

Puisque $(\overline{BO}\,\hat{,}\,\overline{BO'})\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ alors B ∈ Γ et par suite ζ'' est le cercle circonscrit au triangle BOO' on obtient donc $\Gamma=\zeta''/\{O,\ O'\}$. donc que E ∈ Γ car $(\overline{EO}\,\hat{,}\,\overline{EO'})\equiv\frac{2\pi}{3}[\pi]$

4) I le centre du cercle circonscrit au triangle BCD.

$\Gamma = \left\{ M \in P, \left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MO'}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[\pi] \right\} \cup \{ O , O' \}$ $D \notin \zeta$ et $C \notin \zeta'$ donc I est différent de O et O'

On a : $\begin{cases} IC = IB = ID \\ OB = OC \\ O'B = O'D \end{cases}$ donc $(OI) = med([BC])$ et $(O'I) = med([BD])$

Et par suite $\overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{O'I} \perp \overrightarrow{BD}$

$\left(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) + \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IO'}\right)[\pi] \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) + \frac{\pi}{2}[\pi] \equiv \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)[\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[\pi]$

Et par suite I $\in \Gamma$

<u>Exercice 27</u> : 1/ O et C sont situés sur le même avec $\widehat{BA}$ et les angles $B\hat{O}A$ et $B\hat{C}A$ interceptent le même arc donc on a : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

* ABC est un triangle rectangle isocèle en A alors on a :

$BC^2 = 2\,AB^2 \Leftrightarrow AB^2 = \frac{BC^2}{2} \Leftrightarrow AB = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

2) $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow$ G est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1) on a donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

a/ C et K sont situés de part et d'autre de (AB) donc

$\left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)[2\pi] \equiv \pi + \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

b/ on a (KG) ⊥ (KB) et (AH) ⊥ (KB) alors (KG) // (AH)

D'après l'énoncé de Thalès on a : $\frac{KH}{KB} = \frac{GA}{GB} = \frac{1}{2}$ Sig $KH = \frac{1}{2}KB$

$\overrightarrow{KH}$ et $\overrightarrow{KB}$ sont deux vecteurs colinéaires de sens contraires donc $\overrightarrow{KH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KB}$

$\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KH}.\overrightarrow{KB}$ (car H projeté orthogonal de A sur (KB)) $= -\frac{1}{2}\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}KB^2$

c/ $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = KA.KB\cos\left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}\right) = -\frac{1}{2}KB^2 \Leftrightarrow KA.KB.\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{2}KB^2 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}KAKB = -\frac{1}{2}KB^2$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}KA = -\frac{1}{2}KB \Leftrightarrow \frac{KB}{KA} = \sqrt{2}$

d/ On applique la formule d'El Kashi dans le triangle AKB.

$AB^2 = AK^2 + BK^2 - 2\,AK\,KB \cdot \cos\left(\left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}\right)\right)$.

On a $\begin{cases} \cos\left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ BK = \sqrt{2}AK \end{cases}$ Donc $AB^2 = 5\,KA^2 \Rightarrow KA^2 = \frac{AB^2}{5} \Rightarrow KA = \sqrt{\frac{5}{2}}$ et $KB = \sqrt{5}$

3) BKA est un triangle non isocèle en K .D'après le théorème des bissectrices on a :

$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = -\frac{KA}{KB} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = -\sqrt{2}\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{IA} = \vec{0}$ Donc I est le barycentre des points pondérés (A , $\sqrt{2}$) et (B , 1)

Signifie $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\overrightarrow{AB} \Rightarrow AI = \frac{1}{1+\sqrt{2}}AB = \frac{1}{1+\sqrt{2}}.\frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5(2-\sqrt{2})}{2}$; $AI = \frac{5(2-\sqrt{2})}{2}$

4) $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MB}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MA}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MB} - \sqrt{2}\,\overrightarrow{MA}\right)\left(\overrightarrow{MB} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{MA}\right) = 0$

Soit I barycentre de (B , 1) et (A , $\sqrt{2}$) et J barycentre de (B , 1) et (A , - $\sqrt{2}$)

Donc Γ est le cercle de diamètre [I J] . D'autre part on a $\frac{KB}{KA} = \sqrt{2}$ donc K $\in \Gamma$.

J est le point de rencontre de la bissectrice extérieur de secteur [KA , KB] et (AB)

5) K' $\in$ Γ donc $\frac{K'B}{K'A} = \sqrt{2}$ et I $\in$ (AB) et $\frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = -\sqrt{2}$; K'AB est non isocèle en K' et $\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = -\frac{K'A}{K'B}$

Signifie I est le point de rencontre de (AB) est la bissectrice intérieur du secteur
[K'A , K'B] sig [K'I) est la bissectrice intérieure de [K'A , K'B].
K et K' $\in$ Γ de part et d'autre de (AB) alors

$\left(\overrightarrow{K'A}, \overrightarrow{K'B}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}\right)[2\pi] \equiv \pi - \frac{3\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{K'A}, \overrightarrow{K'I}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{K'A}, \overrightarrow{K'B}\right)[2\pi]$

Et par suite $\left(\overrightarrow{K'A}, \overrightarrow{K'I}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$.

Solutions

Exercice N° 1 : 1) a ; 2) b ; 3)a) ; 4) c) 5)a) ; 6) b
7) b ; 8) b ; 9) b) ; 10) b
11) $1+2\cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow S_{[0,2\pi[} = \left[0,\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left[\frac{4\pi}{3},2\pi\right[$;12)b).

Exercice N°2 : 1°/ Faux car par exemple pour a = 0 et b = $\frac{\pi}{4}$ on a $\cos\left(0+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$\cos(0) + \cos\frac{\pi}{4} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\cos(a+b) \neq \cos a + \cos b$.

2°/ Vrai car $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x$ s'écrit sous la forme a cos 2x + b sin 2x. Donc $r=\sqrt{a^2+b^2}=2$,
$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}$ donc $\varphi \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. D'où $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

3°/Faux $\left(\vec{i},\widehat{\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\left(\vec{i},\widehat{\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; D'où $\left(\overrightarrow{OA},\widehat{\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA},\widehat{\vec{i}}\right)+\left(\vec{i},\widehat{\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

4°/ Faux $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{3}\right)$ d'où $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $y=-\frac{1}{3}$; $r=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2}{3}$.

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\theta = \frac{y}{r} = -\frac{1}{2}$ Alors $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ d'où $A\left(\frac{2}{3}, -\frac{5\pi}{6}\right)$

Exercice N° 3 : 1) $OA^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 36$; $OB^2 = (\sqrt{3})^2 + (-1)^2 = 4$
$AB^2 = (3-\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3}+1)^2 = 9 - 6\sqrt{3} + 3 + 27 + 6\sqrt{3} + 1 = 40$ D'où $AB^2 = OB^2 + OA^2$ d'après Pythagore OAB est rectangle en O.

2-a) A (3 , $3\sqrt{3}$) alors : $r=\sqrt{(3)^2+(3\sqrt{3})^2}=6$ $\begin{cases}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ donc $\theta \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

En fin A $(6,\frac{\pi}{3})$; B ($\sqrt{3}$, -1) alors

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$; $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{-1}{2}\end{cases}$ donc $\theta \equiv \frac{-\pi}{6}[2\pi]$, $B\left(2,\frac{-\pi}{6}\right)$

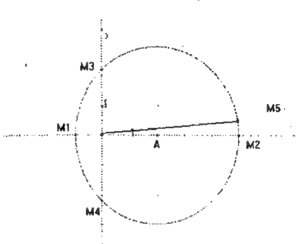
b) $\left(\overrightarrow{OA},\widehat{\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA},\widehat{\vec{i}}\right)+\left(\vec{i},\widehat{\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv -\left(\vec{i},\widehat{\overrightarrow{OA}}\right)+\left(\vec{i},\widehat{\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
Donc le triangle OAB est rectangle en O.

Exercice N° 4 : On pose $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$ et on a $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $\cos\left(\vec{j},\widehat{\vec{u}}\right) = \frac{\vec{j}\cdot\vec{u}}{\|\vec{j}\|\,\|\vec{u}\|} = \frac{0\times a+b\times 1}{1\times 3} = \frac{b}{3}$ et comme

$\left(\vec{j},\widehat{\vec{u}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc $\cos\left(\vec{j},\widehat{\vec{u}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\frac{b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et par suite $b = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\sin\left(\vec{j},\widehat{\vec{u}}\right) = \frac{\det\left(\vec{j},\vec{u}\right)}{\|\vec{j}\|\,\|\vec{u}\|} = \frac{0\times b-1\times a}{1\times 3} = \frac{-a}{3}$ Et comme $\left(\vec{j},\widehat{\vec{u}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc $\sin(\vec{j},\vec{u}) = \frac{1}{2}$. Donc $\frac{-a}{3} = \frac{1}{2}$

et par suite $a = \frac{-3}{2} \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$



Exercice N° 5 : a) $r=\frac{3}{2}$ et $\theta \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$. $r=\frac{3}{2}$ On trace donc le cercle ζ de centre O et de rayon $\frac{3}{2}$ et comme l'angle varie dans $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ donc c'est l'arc $\overset{\frown}{AB}$ .Ainsi l'ensemble cherché est l'arc $\overset{\frown}{AB}$ avec $A\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ et $B\left(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$.

b) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ alors $\left(\overrightarrow{OI},\widehat{\overrightarrow{OM}}\right) = \frac{3\pi}{4}+2k\pi$ et comme r > 0 donc l'ensemble recherché est la demi droite [oz) - {0} avec $Z(-1,1)$

2ème méthode : $M\left(r,\frac{3\pi}{4}\right)$ soit (x , y) les coordonnées de M . $\Leftrightarrow \begin{cases}X = r\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}r\\ Y = r\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}r = -x\end{cases}$

$Y=-X$ est l'équation d'une droite et comme r > 0 alors x < 0
donc l'ensemble recherché est la demi droite d'équation et $Y=-X$, $X<0$.

c) E = { M (r , θ) tel que $\theta = \frac{-\pi}{4}$ et $r \in]1, 3]$ } alors E est le segment [CD] privée de C avec D est le point tel que $\left(\vec{i},\widehat{\overrightarrow{OD}}\right) \equiv \frac{-\pi}{4}[2\pi]$ et OD = 3 et C ∈ [OD] tel que OC = 1 .

d) $F=\{M(r,\theta)$ tel que $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[$ r = 3) ; alors F est l'arc GH du cercle ζ de centre O et de rayon 3 privée de G et H avec G (0 , -3) et H $\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

Exercice N° 6 :a)
b) les points M_1 , M_2 et M_3 ne sont pas alignés donc il existe un cercle ζ unique passant pas ces trois points . Les points M_3 et M_4 sont symétriques par rapport a l'axe des abscisse alors le centre du cercle ζ est un point de l'axe (O , $\vec{i}$).
les points M_1 et M_2 sont situés sur l'axe (O , $\vec{i}$) donc si M_1 , M_2 , M_3 et M_4 sont situés sur le même cercle alors $[M_1 M_2]$ est son diamètre , soit A =M_1 * M_2 ou A (2 , 0)
;A M_1=2 – (-1) = 3 ;AM_2=5 -2 = 3

$AM_3 = \sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2} = 3$; $AM_4 = \sqrt{2^2+(-\sqrt{5})^2} = 3$

D'où M_1, M_2, M_3 et M_4 sont situés sur le cercle ζ de centre A et de rayon 3 .

2) $M_5\left(r, \frac{\pi}{6}\right) \in \zeta_{(A,3)} \Leftrightarrow AM_5 = 3$ or on a d'après le théorème d'Elkashi dans le triangle OM_5A :

$AM_5^2 = OA^2 + OM_5^2 - 2\,OA \cdot OM_5 \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 9 = 4 + r^2 - 2\times 2\times r \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow r^2 - 2\sqrt{3}\,r - 5 = 0$

$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4\times(-5) = 12 + 20 = 32$; $r = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{32}}{2} = \sqrt{3}-\sqrt{8} < 0$ ou $r = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{32}}{2} = \sqrt{3}+\sqrt{8}$.

Et comme $r > 0$ donc $M_5\left(\sqrt{3}+\sqrt{8}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice N°7 : $A(0;1)$; $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.1) a) $A\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$; $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $r = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$;

$\cos\theta = \frac{1}{2}$; $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ D'où $B\left(1;\frac{\pi}{3}\right)$

b) Voir figure

2) a) $x_C = x_B ; y_C = y_B + 1$ donc $C\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$

b) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ donc OACB est un parallélogramme. On a $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}})[2\pi] \equiv \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

donc $(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OC}}) \equiv (\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}[2\pi] = \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

c) Les coordonnées polaires de C :

$r = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(\sqrt{3}+2)^2}{4}} = \sqrt{\frac{1+3+4\sqrt{3}+4}{4}} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $\theta \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

Donc $C\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2};\frac{5\pi}{12}\right)$ 3) $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

Exercice N° 8: 1°/ a) $(1+\sin x+\cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x + 2\cos x \pm 2\sin x\cos x + 1$

$= 2 + 2\sin x + 2\cos x + 2\sin x\cos x = 2(1+\cos x) + 2\sin x(1+\cos x)$

$= (1+\cos x)(2+2\sin x) = 2(1+\cos x)(1+\sin x)$

b) $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cdot\cos^2 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + 3\sin^2 x\cdot\cos^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cdot\cos^2 x + \cos^4 x) + 3\sin^2 x\cos^2 x$

$= \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cdot\cos x^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$

2°/ Soit l'équation $x^2 - x - 6 = 0$; $\Delta = 25$; $x' = -2$ et $x'' = 3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

Donc $\cos^2 x - \cos x - 6 = (\cos x + 2)(\cos x - 3)$; $\cos x \in [-1, 1]$ alors $\cos x + 2 > 0$ et

$\cos x - 3 < 0 \Rightarrow \cos^2 x - \cos x - 6 < 0$

Exercice N°9

1) $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x.\cos\frac{\pi}{4} + \sin x\sin\frac{\pi}{4}\right) - \left(\sin x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos x + \sin x - \cos x = \sin x$

2°/ a) $1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = 1+\cos 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$*\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)$

Donc $1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$ on a :

$1+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right) = 1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2}.\frac{1}{2}.\cos\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

Exercice N° 10 : 1°/ $(\sin x - \sin y)(\sin x + \sin y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \sin^2 x(\sin^2 y + \cos^2 y) - \sin^2 y(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^2 x.\sin^2 y + \sin^2 x\cos^2 y - \sin^2 y\sin^2 x - \sin^2 y\cos^2 x = \sin^2 x\cos^2 y - \sin^2 y\cos^2 x$

2°/ $(\cos x - \cos y)^2 = \cos^2 x - 2\cos x\cos y + \cos^2 y = \cos^2 x(\cos^2 y + \sin^2 y) - 2\cos x\cos y + \cos^2 y = \cos^2 x\cos^2 y + \cos^2 x\sin^2 y - 2\cos x\cos y + \cos^2 y = (\cos^2 x\cos^2 y - 2\cos x\cos y + 1) + \cos^2 x\sin^2 y + \cos^2 y - 1 = (1-\cos x\cos y)^2 + \sin^2 y(\cos^2 x - 1) = (1-\cos x\cos y)^2 + \sin^2 y.\sin^2 x$

3°/ Soit $x \in IR/\{K\pi, K\in\mathbb{Z}\}$

$\text{Cot}^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x\sin^2 x}{\sin^2 x} = \cos^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right) = \cos^2 x.\cot^2 x$.

Exercice N° 11 : 1) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$*\ \sqrt{3}\cos\left(3x+\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(3x+\frac{\pi}{12}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(3x+\frac{\pi}{12})-\frac{1}{2}\sin(3x+\frac{\pi}{12})\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos(3x+\frac{\pi}{12})+\sin\frac{-\pi}{6}\sin(3x+\frac{\pi}{12})\right) = 2\cos\left(3x+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$

$*\ -2\sin^2\frac{x}{2}+\sqrt{3}\sin x+1$. On a : $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos x \Leftrightarrow 1-2\sin^2\frac{x}{2} = \cos x$

On obtient : $-2\sin^2\frac{x}{2}+\sqrt{3}\sin x+1 = \cos x+\sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right) = 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

2°/ a) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

b) $1-\cos x-\sin x=2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}\;=2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\times\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ *d'après a/*

3°/ $2+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2+2\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)=2+2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x\right)$

$=2+2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=2\left(1+\cos(2x-\frac{\pi}{3})\right)=4\cos^2\left(\frac{2x-\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos^2 x=4\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 12 : 1)a) $\cos 2x-\sin 2x+1=2\cos^2 x-\not 1-2\sin x\cos x+\not 1=2\cos x(\cos x-\sin x)$

b) $\sqrt{2}\sin(x+\frac{3\pi}{4})=\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{3\pi}{4}+\cos x\sin\frac{3\pi}{4})=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)=\cos x-\sin x$

2) $\sin x-\cos 2x=1\Rightarrow\cos 2x-\sin 2x+1=0$; $2\cos x(\cos x-\sin x)=0\Rightarrow(2\cos x)\left[\sqrt{2}\sin(x+\frac{3\pi}{4})\right]=0$

$2\sqrt{2}\cos x\sin(x+\frac{3\pi}{4})=0\Rightarrow\cos x=0$ ou $\sin(x+\frac{3\pi}{4})=0$

$\boxed{x=\frac{\pi}{2}+k\pi}$ ou $x+\frac{3\pi}{4}=k\pi\Rightarrow\boxed{x=-\frac{3\pi}{4}+k\pi}$ $\quad S_{[0,2\pi[}=\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$

3)a) $\frac{2\cos 2x}{\cos 2x-\sin 2x+1}=\frac{2(\cos^2 x-\sin^2 x)}{2\cos x(\cos x-\sin x)}=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x(\cos x-\sin x)}$

$=\frac{(\cos x+\sin x)}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}=1+\text{tg}x$

b)pour $x=\frac{\pi}{12}$

$1+\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{12}\right)+1}=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+1}$

$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+1}-1=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}-1=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}-1=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}-1=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}=2-\sqrt{3}$

Exercice N° 13: $f(x)=\cos 2x-\sin 2x+1$

1) a) $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}+1=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=1$

b) $f(x)=\cos 2x-\sin 2x+1=2\cos^2-1-2\sin x\cos x+1=2\cos x(\cos x-\sin x)$

$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

D'où $f(x)=2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\end{cases}$ signifie que $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\text{ ou }x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ signifie que

$\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad;\quad k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{4}+2k'\pi\text{ ou }x=-\frac{\pi}{4}+2k'\pi;k'\in\mathbb{Z}\end{cases}$ Donc $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+2k'\pi;-\frac{3\pi}{4}+2k'\pi;k'\in\mathbb{Z}\right\}$

Dans $[0;\pi]$; $0<\frac{\pi}{2}+k\pi<\pi$ signifie que $0<\frac{1}{2}+k<1$ signifie que $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$ donc $k=0$ signifie que $x=\frac{\pi}{2}$

$0<\frac{\pi}{4}+2k'\pi<\pi\Leftrightarrow 0<\frac{1}{4}+2k'<1$ signifie $-\frac{3}{2}<2k'<\frac{1}{2}$ signifie $-\frac{1}{4}<k'<\frac{1}{4}$ donc $k'=0$ signifie que $x=\frac{\pi}{4}$

$0<-\frac{3\pi}{4}+2k'\pi<\pi\Leftrightarrow 0<-\frac{3}{4}+2k'<1\Leftrightarrow\frac{3}{4}<2k'<\frac{7}{4}$ signifie $\frac{3}{8}<k'<\frac{7}{8}$ donc $k'=0$ signifie que

$x=-\frac{3\pi}{4}\notin[0;\pi]$. Donc $S_{[0;\pi]}=\left\{;\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right\}$

2) $g:[0;\pi]\to\mathbb{R}\quad x\mapsto\frac{-1+\sin 2x}{f(x)}$ a) $g(x)=\frac{-1+\sin 2x}{2\sqrt{2}\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$; $D_g=[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right\}$

b) $g(x)=\frac{-1+\sin 2x}{\cos 2x-\sin 2x+1}=\frac{-1+2\sin x\cos x}{2\cos^2 x-2\sin x\cos x}=\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos x}}{2-2\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{2\tan x-\frac{1}{\cos^2 x}}{2(1-\tan x)}$

$=\frac{2\tan x-1-\tan^2 x}{2(1-\tan x)}=\frac{-\tan^2 x+2\tan x-1}{2(1-\tan x)}=\frac{-(\tan x-1)^2}{2(1-\tan x)}=\frac{\tan x-1}{2}$

c) $g\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{-1+\sin\frac{\pi}{4}}{1}=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-2}{2}$ On a aussi $g\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{8}-1}{2}\Leftrightarrow\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-2+1=\sqrt{2}-1$

d) $\sin 2x+(1-\sqrt{2})\cos 2x=1$ signifie que $2\sin x\cos x+(1-\sqrt{2})(2\cos^2 x-1)=1$ signifie que

$\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}+(1-\sqrt{2})\frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$ signifie que $2\tan x+(1-\sqrt{2})\left(2-\frac{1}{\cos^2 x}\right)=\frac{1}{\cos^2 x}$ signifie que

$2\tan x+(1-\sqrt{2})(1-\tan^2 x)=1+\tan^2 x$ signifie que $2\tan x-(1-\sqrt{2})\tan^2 x+1-\sqrt{2}-1-\tan^2 x=0$ signifie que

$2\tan x-\tan^2 x+\sqrt{2}\tan^2 x-\tan^2 x-\sqrt{2}=0$ signifie que $(\sqrt{2}-2)\tan^2 x+2\tan x-\sqrt{2}=0$;

$(\sqrt{2}-2)X^2+2X-\sqrt{2}=0$; ; $X_1=1$; $X_2=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}=\frac{-1}{1-\sqrt{2}}$

Exercice N° 14 : 1) $A(x)=\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x;x\in\mathbb{R}$

a) $A=\sqrt{2}(\cos 2x-\sin 2x)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

b) $A(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\cos 2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\left(2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)-1\right)=4\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)-2$

On a $A(0)=\sqrt{2}=4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-2$ signifie que $4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}+2$ signifie que $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}+2}{4}$

On a : $\frac{\pi}{8}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\frac{\pi}{8}>0$ et par suite $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

c) $A(x)=\sqrt{\sqrt{2}+2}$ signifie que $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$ signifie que $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ signifie que

$\begin{cases}2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}+2k\pi\\ 2\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{8}+2k\pi\end{cases}$; $k\in\mathbb{Z}$ signifie que $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{16}+k\pi\\ x=-\frac{3\pi}{16}+k\pi\end{cases}$; $k\in\mathbb{Z}$ d'où $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{16}+k\pi;-\frac{3\pi}{16}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

Dans $[0;2\pi[$; $0\le-\frac{\pi}{16}+k\pi<2\pi$ signifie que $0\le-\frac{1}{16}+k<2$ signifie que $\frac{1}{16}\le k<\frac{33}{16}$ donc $k=1$ et $k=2$

Pour $k=1; x=15\frac{\pi}{6}$

Pour $k=2;\frac{31\pi}{16}$; $0\le-\frac{3\pi}{16}+k\pi<2\pi$ Signifie que $\frac{3}{16}\le k<\frac{35\pi}{16}$ donc $k=1$ et $k=2$

Pour $k=1; x=\frac{13\pi}{16}$; Pour $k=2;\frac{29\pi}{16}$ Donc $S_{[0;2\pi[}=\left\{\frac{15\pi}{16};\frac{31\pi}{16};\frac{13\pi}{16};\frac{29\pi}{16}\right\}$

2) $AB=4$; $(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}})=-\frac{63\pi}{4}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

a) On a : $(\widehat{\overline{DA};\overline{DB}})\equiv(\widehat{\overline{CA};\overline{CB}})[2\pi]\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$

$(\widehat{\overline{DB};\overline{BA}})\equiv\pi-(\widehat{\overline{DA};\overline{DB}})-(\widehat{\overline{AB};\overline{AD}})[2\pi]\equiv\pi-\frac{3\pi}{8}-\frac{4\pi}{4}[2\pi]\left(\text{car}(\widehat{\overline{AB};\overline{AD}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\right)$

$\pi-\frac{7\pi}{8}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$

b) On a : A, B et D appartiennent à ζ et $(\widehat{\overline{AB};\overline{AD}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc le point $O\in[BD]$

On a $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{AB}{25}$ signifie que $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}=\frac{4}{25}$ signifie que $r=\frac{4}{\sqrt{\sqrt{2}+2}}$

$\text{dét}(\overline{BD};\overline{BA})\equiv\|\overline{BD}\|.\|\overline{BA}\|\sin\frac{\pi}{8}\equiv\frac{8}{\sqrt{\sqrt{2}+2}}\times4\times\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}\right)\equiv\frac{32\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}\right)}{2}$

Autrement : $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{AB\times AD}{2}=2AD$; $\left(AD=2r\times\sin\frac{\pi}{8}\right)$ signifie: $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{16}{\sqrt{\sqrt{2}+2}}\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}\right)$

$=\frac{8}{\sqrt{\sqrt{2}+2}}\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}\right)$

c) $A'=S_{(BC)}(A)$ donc ABA'isocèle en B, d'où $(\widehat{\overline{A'B};\overline{A'A}})[2\pi]\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$

$(\widehat{\overline{A'B};\overline{A'C}})\equiv2(\widehat{\overline{AB};\overline{AA'}})[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$; $(\widehat{\overline{MB};\overline{MC}})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

L'ensemble des points est l'arc $\overset{\frown}{BC}$ du cercle de centre A'et passant par B et C

Exercice N° 15 : 1°/ $\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1+\sin x$

2°/ a) $X^2+Y^2=\frac{\cos^2x}{2+2\sin x}+\frac{(1+\sin x)^2}{2+2\sin x}=\frac{\cos^2x+1+\sin^2x+2\sin x}{2+2\sin x}=\frac{2+2\sin x}{2+2\sin x}=1$

b) Soit $\zeta=\{M(X,Y)\ ;\ X^2+Y^2=1\}$; $X^2+Y^2=1\Leftrightarrow(X-0)^2+(Y-0)^2=1$

Donc ζ est le cercle de centre O et de rayon 1

3°/ a) on a : $2+2\sin x=2(1+\sin x)=2\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2$. De même on a :

$\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\right)^2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $2+2\sin x=4\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\sqrt{2+2\sin x}=2\left|\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|$

Or $x\in]0,\pi[$ donc $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\in\left]\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\Leftrightarrow\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>0$

Et par suite $\sqrt{2+2\sin x}=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$

$X=\frac{\cos x}{\sqrt{2+2\sin x}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}}$

$=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow X=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$Y = \frac{1+\sin x}{\sqrt{2+2\sin x}} = \frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow Y = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

b) On pose $a = \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$ si $x \in]0\,,\,\pi[$ alors $a \in \left]\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{3\pi}{4}\right[$;

soit $M = \left\{ M(x,y) \text{ tel que } X = \cos a \text{ et } y = \sin a\,,\ a \in \left]\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{3\pi}{4}\right[\right\}$

$a \in \left]\frac{\pi}{4}\,,\frac{3\pi}{4}\right[$ donc $x \in \left]\frac{-\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et $y \in \left]\frac{-\sqrt{2}}{2}\,,\,1\right[$ Soit les points $A\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\,,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right) = x+2k\pi = \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi$

Et par conséquent M est l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de centre O privé de A et B et contenant le point I(0 , 1)

Exercice N°16 : $U(x) = \sin(\pi x) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 1) a) $U(1) = \sin\pi - 2\sin\frac{\pi}{2} = 0-2 = -2$;

$U\left(-\frac{1}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{1}{2} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

$U\left(\frac{3}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1-\sqrt{2} = -\left(1+\sqrt{2}\right)$;

$U\left(\frac{5}{3}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}-2\times\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $U(x+4k) = \text{son}\left(\pi(x+4k)\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+4k)\right) = \sin(\pi x+4\pi k) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x+2k\pi\right)$

$= \sin\pi x - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = U(x)$

2) a) $U(x) = \sin(\pi x) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \sin\left(2.\frac{\pi}{2}x\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 2\sin\frac{\pi}{2}x.\cos\frac{\pi}{2}x - 2\sin\frac{\pi}{2}x$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\cos\left(2.\frac{\pi}{4}x\right)-1\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)$

$= -4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

b) $U\left(\frac{3}{2}\right) = -4\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -1-\sqrt{2}$ signifie que $-4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -1-\sqrt{2}$ signifie que

$\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$. Puisque $\frac{3\pi}{8} \in [0;\pi]$ donc $\sin\frac{3\pi}{8} > 0$ et par suite $\sin\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$

$\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1$ Donc $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1-\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ signifie que $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1-\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

d'où $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$.

c) $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}}{\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{1}} = \sqrt{2}+1$

3) $U(x)+\sin\frac{\pi}{2}x = \sin\pi x - \sin\frac{\pi}{2}x = 0$ signifie que $\sin\frac{\pi}{2}x\left(2\cos\frac{\pi}{2}x-1\right) = 0$ signifie que

$\sin\frac{\pi}{2}x = 0$ ou $2\cos\frac{\pi}{2}x-1 = 0$

$\sin\frac{\pi}{2}x = 0$ signifie que $\frac{\pi}{2}x = k\pi$ signifie que $x = 2k$

$0 \le 2k < 2$ signifie que $0 \le k < 1$ donc $k = 0$ signifie que $x = 0$.

$\cos\frac{\pi}{2}x = \cos\frac{\pi}{3}$ signifie que $\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2}x = -\frac{\pi}{3}+2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ signifie

que $x = \frac{2}{3}+4k$ ou $x = -\frac{2}{3}+4k; k \in \mathbb{Z}$

$0 \le \frac{2}{3}+4k < 2$ signifie que $-\frac{2}{3} \le 4k < \frac{4}{3}$ signifie que $-\frac{1}{6} \le k < \frac{1}{3}$ signifie que $k = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$0 \le -\frac{2}{3}+4k < 2$ signifie que $\frac{2}{3} \le 4k < \frac{8}{3}$ signifie que $\frac{1}{6} \le k < \frac{2}{3}$ impossible Donc $S_{[0;2[} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

Exercice N° 17 : 1°/ a) $f(x) = 1+\sin 2x - \cos 2x = 1-\cos 2x+\sin 2x = 2\sin^2 x+2\sin x\ \cos x =$

$2\sin x(\sin x+\cos x) = 2\sin x\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)\right) = 2\sqrt{2}\sin x\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

b) $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1+\sin 2\frac{\pi}{12} - \cos\frac{2\pi}{12} = 1+\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} = 1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, d'autre part

$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}$ et par suite $2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\,.\,\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2°/ $g(x) = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\sin x\ .\ \cos\frac{\pi}{4}+\cos x\ \ \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos x\ .\ \cos\frac{\pi}{4}+\sin x\ \ \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)\right) = (\cos x+\sin x)^2 = \cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\ \cos x = 1+\sin 2x$

3°/ $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{1+\sin 2x}{2\sqrt{2}\sin x\,.\,\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

a) $\sin x\,.\,\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq 0\\ et\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq K\pi \quad K\in\mathbb{Z}\\ x-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+K\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq K\pi \quad K\in\mathbb{Z}\\ x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi\end{cases}$

Aussi $D_h=IR/\left\{K\pi\ ,\ \frac{3\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $h(x)=\dfrac{1+\sin 2x}{2\sqrt{2}\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin x}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)}{2\sqrt{2}\sin x}=\dfrac{\sin x+\cos x}{2\sin x}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cot x$

c) $h\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cot g\frac{\pi}{8}=\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{8}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\Leftrightarrow\cot\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}+1\ ;\ \mathrm{tg}\frac{\pi}{8}=\dfrac{1}{\cot\frac{\pi}{8}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

* on a $1+\cot^2\frac{\pi}{8}=\dfrac{1}{\sin^2\frac{\pi}{8}}$ eq $\sin^2\frac{\pi}{8}=\dfrac{1}{1+\cot^2\frac{\pi}{8}}=\dfrac{1}{4+2\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

Comme $\sin\frac{\pi}{8}\rangle\ 0$ alors $\sin\frac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

* $\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1$ donne que $\cos\frac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ car $\cos\frac{\pi}{8}\rangle\ 0$

Exercice N° 18 : 1) sin5x = sin (x + 4 x) = sin x . cos 4x + sin 4x cos x = sin x (2 cos² 2x – 1)
+ 2 cos x . cos 2x sin 2x = 2 sin x . cos² 2x – sin x + 2 cos x . cos 2x . 2 sin x . cos x
= 2 sin x (1-2 sin² x)^2 – sinx + 4 sinx . cos²x . (1 – 2sin²x)
= 2 sinx (1 – 4 sin²x + 4 sin^4 x) – sin x + (1 – sin² x) (4 sinx – 8 sin^{3}x)
= 2 sinx – 8 sin^{3}x + 8 sin^{5}x – sinx + 4 sinx – 8 sin^{3}x – 4 sin^{3}x + 8 sin^5 x = 16 sin^{5}x – 20 sin^{3}x + 5 sinx

2) a/ $16\sin^5\frac{\pi}{5}-20\sin^3\frac{\pi}{5}+5\sin\frac{\pi}{5}=\sin 5\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sin\pi=0$

$16\sin\frac{2\pi}{5}-20\sin^3\frac{2\pi}{5}+5\sin\frac{\pi}{5}=\sin\left(5\frac{2\pi}{5}\right)=\sin 2\pi=0$ Donc $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ sont deux solutions de (E)

b/ $16x^5-20x^3+5x=x(16x^4-20x^2+5)=0\Leftrightarrow x=0$ où $16x^4-20x^2+5=0$

soit t = x² l'équation 16x^4 – 20x² + 5 s'écrit : 16t² - 20t + 5 = 0 Δ' = 20; $t'=\dfrac{10-2\sqrt{5}}{16}$, $t''=\dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}$

Remarquons que t' et t'' sont positifs

Donc $S_{IR}=\left\{0\ ,\ \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\ ,\ \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\ ,\ -\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\ ,\ -\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right\}$

c/ On remarque $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$ sont deux solution positive de (E) et $\sin\frac{\pi}{5}<\sin\frac{2\pi}{5}$

alors $\sin\frac{\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{10+\sqrt{25}}}{4}$.

Exercise N°19:

a) $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Signifie $\sin x=\sin\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+2K\pi\\ ou\\ x=\pi-\frac{\pi}{3}+2K\pi\end{cases}$ $K\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+2x\pi\\ ou\\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ $K\in\mathbb{Z}$;

$S_{[0\,.\,2\pi[}=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\}$

b) $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ sig $\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2\pi}{3}+2K\pi\\ ou\\ x=-\frac{2\pi}{3}+2K\pi\end{cases}$ $K\in\mathbb{Z}\Rightarrow S_{[0\,.\,2\pi[}=\left\{\frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{4\pi}{3}\right\}$

c) $\sin 2x=-\dfrac{1}{2}$ sig $\sin 2x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x=-\frac{\pi}{6}+2K\pi\\ ou\\ 2x=\frac{7\pi}{6}+2K\pi\end{cases}$ $K\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{\pi}{12}+K\pi\\ ou\\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$

$S_{[0\,.\,2\pi[}=\left\{\frac{7\pi}{12}\ ;\ \frac{11\pi}{12}\ ;\ \frac{19\pi}{12}\ ;\ \frac{23}{12}\pi\right\}$

d) sin2x + sin x cos x = 0 ⇔ sin 2x + $\frac{1}{2}$ sin 2x = 0 ⇔ $\frac{3}{2}\sin 2x=0$

⇔ sin 2x = 0 ⇔ 2x = kπ , $k\in\mathbb{Z}$ ⇔ $x=\frac{k\pi}{2}$;$k\in\mathbb{Z}$ ⇒ $S_{[0\,.\,2\pi[}=\left\{0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\ ,\ \frac{3\pi}{2}\right\}$

e) $\cos 3x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sig $\cos 3x=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=\frac{\pi}{4}+2K\pi\\ ou\\ 3x=-\frac{\pi}{4}+2K\pi\end{cases}$ $K\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\\ ou\\ x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$

$S_{[0\,,\,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

Exercice N° 20: 1) a) $\cos 2x + \cos x = -1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x = -1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x = 0$
$\Leftrightarrow \cos x\,(2\cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = 0\\ 2\cos x + 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = 0\\ \cos x = -\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin|x| = \frac{1}{2}$ on a deux cas à étudier

si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ donc $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \quad\text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}_+$

si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$; $\sin(-x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}_-$

Pour $k = 0$ on $x = \frac{7\pi}{6}$ à rejeter

$S_{IR} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\,,\ k \in \mathbb{Z}_+\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}_-\right\} / \left\{\frac{7\pi}{6}\right\}$

$\Rightarrow S_{]-\pi\,,\,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}\right\}$

c) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ 3x + \frac{\pi}{4} = -x - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 4x = -\pi + 2k\pi \end{cases} K \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$S_{IR} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\,, -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; $S_{]-\pi\,,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}\,, -\frac{\pi}{4};\ -\frac{-3\pi}{4}\ ; \frac{3\pi}{4}\right\}$

d) $\cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow 1 + \cos 2x = 1 - \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow S_{IR} = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, K \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow S_{]-\pi\,,\,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

e) $\cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x = 1$ *éq à* : $2\left(\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x\right) = 1$

$\Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 4x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 4x\right) = 1 \Leftrightarrow 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 4x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 4x = 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Rightarrow S_{IR} = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\ ,\ \frac{k\pi}{2}\quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$S_{]-\pi\,,\,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, 0, \pi\, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{6}\right\}$

f) $\tan x + \tan 3x = 0$: il faut que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ *et* $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$; pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ *et* $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

$\tan x + \tan 3x = 0 \Leftrightarrow \tan 3x = -\tan x \Leftrightarrow \tan 3x = \tan(-x) \Leftrightarrow 3x = -x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}$. D'ou $S_{IR} = \left\{\frac{k\pi}{4}\ , k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\Rightarrow S_{]-\pi\,,\,\pi]} = \left\{0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$

g) $\tan 2x.\cot\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$. Il faut que $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $3x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in x$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$

$\tan 2x.\cot\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{1}{\cot\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)} = \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = 3x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Vérifions que la solution x est différent de $\frac{\pi}{4} + \frac{k'\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{9} + \frac{k'\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{\pi}{4} + k'\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 12k - 6k' = -1 \Leftrightarrow 2(6k - 3k') = -1$ impossible

$\frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{\pi}{9} + k'\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3 + 9k = 1 + 3k' \Leftrightarrow 3(3k - h) = -2$ impossible

Donc $S_{IR} = \left\{\frac{\pi}{3} + K\pi\ ,\ K \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow S_{]-\pi\,,\,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ -\frac{2\pi}{3}\right\}$

Exercice N°21 : 1) a) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, on pose $X = \cos x$, l'équation devient $2X^2 - X - 1 = 0$:

$a + b + c = 0$ donc $X' = 1$, $X'' = -\frac{1}{2}$ * $X = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$* \ x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Rightarrow S_{IR} = \left\{2k\pi\ ,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0$ on pose $X = \sin x$, l'équation devient
$X^2 - 3X - 4 = 0$ on a $a - b + c = 0$, donc $X' = -1$ et $X'' = 4$

* $x = -1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$

* $x = 4 \Leftrightarrow \sin x = 4$ impossible $\Rightarrow S_{IR} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $(\sqrt{2}+1)\sin^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos^2 x + \sin 2x = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin^2 x + \cos^2 x) + (\sin^2 x - \cos^2 x) + \sin 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} - (\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin 2x = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} - \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 1 \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

$\Rightarrow S_{IR} = \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{K\pi}{2} \ ; \ K \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $(\cos x - \sin x)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow -2\sin x \quad \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \quad ou \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \quad ou \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Rightarrow S_{IR} = \left\{\frac{\pi}{12} + K\pi \ , \frac{5\pi}{12} + K\pi \ ; K \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $\tan^2 x - 3\text{tg}\, x - 4 = 0$

on pose X = tan x ; l'équation devient $X^2 - 3X - 4 = 0$; a – b + c = 0 donc X' = -1 et X'' = 4

* $X = -1 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

* X = 4 ⇔ tan x = 4 n'a pas de solution remarquable

Il existe un réel $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2} \ , \ \frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* : $\tan\theta = 4 \Leftrightarrow x = \theta + k\pi \Rightarrow S_{IR} = \left\{-\frac{\pi}{4} + K\pi \ , \theta + K\pi \ , \ K \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice N° 22 : 1) a) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$: soient les points E et F du cercle trigonométrique d'ordonnée $\frac{\sqrt{2}}{2}$ les images des solutions de $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les points de l'arc EBF

$\Rightarrow S_{[0\,,\,2\pi[} = \left[\frac{\pi}{4} \ , \ \frac{3\pi}{4}\right]$

b) $\cos x \geq \frac{1}{2}$: soient les points E et F du cercle trigonométrique d'abscisses $\frac{1}{2}$

les images des solutions de $\cos x \geq \frac{1}{2}$ est l'arc $\widehat{EAF} \Rightarrow S_{[0\,,\,2\pi[} = \left[0 \ , \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3} \ , \ 2\pi\right[$

c) $\sqrt{1-\cos x} \rangle \sin x$; $\sqrt{1-\cos x}$ est bien définie car $-1 \leq \cos x \leq 1$

1er cas : si $x \in [0 \ , \pi]$ *alors* $\sin x \geq 0$

$\sqrt{1-\cos x} > \sin x \Leftrightarrow 1 - \cos x > \sin^2 x \Leftrightarrow 1 - \cos x > 1 - \cos^2 x \Leftrightarrow 1 - \cos x - 1 + \cos^2 x > 0 \Leftrightarrow \cos x(x\text{osx} - 1) > 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Cosx		+	0	-	
Cos x -1		-	0	-	
Cos x (cos x – 1)	0	-	0	+	

$x \in [0 \ , \pi]$ *donc* $S_1 = \left]\frac{\pi}{2} \ . \ \pi\right]$

2eme cas : si $x \in]\pi, 2\pi[$

On a $\sin x \langle 0$ *alors* $\sqrt{1-\cos x} \rangle \sin x$ est toujours vérifiée . Donc $S_2 =]\pi \ , 2\pi[$

La solution de $\sqrt{1-\cos x} \rangle \sin x$ *dans* $[0 \ , 2\pi[$ est $S = S_1 \cup S_2 = \left]\frac{\pi}{2} \ , \pi\right] \cup]\pi, 2\pi[= \left]\frac{\pi}{2} \ , \ 2\pi\right[$

d) $\sqrt{2}\sin x + 1 < 0 \Leftrightarrow \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Soient les points E et F du cercle trigonométrique d'ordonnée $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Les images de solution de $\sqrt{2}\sin x + 1 \langle 0$ est l'arc $\widehat{EB'F}$. Donc $S_{[0\,,\,2\pi[} = \left]\frac{5\pi}{4} \ , \ \frac{7\pi}{4}\right[$.

e) $2\sin x - \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

On pose X = 2 x l'inégalité devient $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur IR on trouve que :

$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq X \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$

Pour k = 0 on a : $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ et Pour k = 1 on a : $\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$. Donc $S_{[0\,,\,2\pi[} = \left[\frac{\pi}{6} \ , \ \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6} \ , \ \frac{4\pi}{3}\right]$

Exercice N° 23 : 1)a) $4\sin^2 x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (2\sin x)^2 - 1^2 \leq 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)\ (2\sin x + 1) \leq 0$.

Il faut dresser le tableau de signe du produit (2sin x – 1) (2sin x +1)

Puisque $x \in [0 \ , \pi]$ *alors* $\sin x \geq 0$ *donc* $\sin x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin x + 1 \geq 0$

et 2 sin x -1 = 0 ⇔ $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$ alors $[0 \ , \pi]$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
2sin x +1		+		+		+	
2sin x -1		-	0	+	0	-	
(sin x +1) (2sin – 1)		-	0	+	0	-	

$S_{[0\,,\,\pi]} = \left[0 \ , \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} \ , \pi\right]$

b) $\cos 2x+\sin 2x-1\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)-1\geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1\geq 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\leq 2x-\frac{\pi}{4}\leq+\frac{\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow 2k\pi\leq 2x\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{4}+k\pi$

Pour k = 0 $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$. Donc $S_{[0,\pi]}=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\{\pi\}$

c) $\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\ \langle\ 0 \Leftrightarrow \tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\ \langle\ \sqrt{3}$

On pose $t=2x-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \tan t\ \langle\ \sqrt{3}$. A partir du cercle trigonométrique on a :

$-\frac{\pi}{2}+k\pi<t<\frac{\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+k\pi<2x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}+k\pi<2x<\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

Pour k = 0 on a : $-\frac{\pi}{6}\ \langle\ x\ \langle\ \frac{\pi}{4}$; pour k = 1 on a : $\frac{\pi}{3}\ \langle\ x\ \langle\ \frac{3\pi}{4}$

Pour k = 2 on a : $\frac{5\pi}{6}\ \langle\ x\ \langle\ \frac{5\pi}{4}$ donc $S_{[0,\pi]}=\left[0,\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6},\pi\right[$

Exercice N° 24 : 1) a) $4\cos^2 x-2(\sqrt{2}-1)\cos x-\sqrt{2}\ \rangle\ 0$; on pose t = cos x. On obtient $4t^2-2(\sqrt{2}-1)t-\sqrt{2}\ \rangle\ 0$

$\Delta=4(\sqrt{2}-1)^2+16\sqrt{2}=12+8\sqrt{2}=4(3+2\sqrt{2})=4(\sqrt{2}+1)^2$, $t'=-\frac{1}{2}$, $t''=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$4\cos^2 x-2(\sqrt{2}-1)\cos x-\sqrt{2}\ \rangle\ 0 \Leftrightarrow 4\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ \rangle\ 0$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
cos x + $\frac{1}{2}$		+		+	0	-	
cos x - $\frac{\sqrt{2}}{2}$		+	0	-	0	-	
(cos x + $\frac{1}{2}$) (cos x - $\frac{\sqrt{2}}{2}$)		+	0	-	0	+	

$S_{[0,\pi]}=\left]0,\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{2\pi}{3},\pi\right[$

b) $\sqrt{3}\tan^2-(1+\sqrt{3})\tan x+1\ \langle\ 0 \Leftrightarrow (\tan x-1)(\sqrt{3}\tan x-1)\ \langle\ 0$ même travail que (a)

$\Leftrightarrow \begin{cases} tgx-1>0 \\ \sqrt{3}\ \ tgx-1\ \langle\ 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} tgx-1<0 \\ \sqrt{3}\ \ tgx-1\ \rangle\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tgx\ \rangle\ 1 \\ tgx\ \langle\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ ou $\begin{cases} tgx\ \langle\ 1 \\ tgx\ \rangle\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} tgx\ \langle\ 1 \\ tgx\ \rangle\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\ \langle\ tgx\ \langle\ 1 \Leftrightarrow x\in\left]\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,\ \frac{\pi}{4}+k\pi\right[$

Pour k = 0 , $x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[$. Donc $S_{[0,\pi]}=\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[$

c) $\frac{\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x}{2\sin x-1}\geq 0$

$\frac{\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x}{2\sin x-1}=\frac{2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{2\sin x-1}$; $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$ sur $[0,\pi]$

$2\sin x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6} \\ x=\frac{5\pi}{6} \end{cases}$ sur $[0,\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$		+		+	0	-	0	+	
$2\sin x-1$		-	0	+		+	0	-	
$\frac{2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{2\sin x-1}$		-		+	0	-		-	

$S_{[0,\pi]}=\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

Exercice N° 25: A/ 1) 3 cos x + 16 $\cos^5$ x – 16 $\cos^3$ x = 3 cos x + 16 $\cos^3$ x ($\cos^2$x – 1)
= 3cos x + 16 $\cos^3$x (- $\sin^2$x)= 3 cos² x – 16 $\cos^3$ x . $\sin^2$x = cos x [3-16 cosx² x . $\sin^2$x]
= cos x [3 - 4 (2cosx . sinx)²]= cos x [3 - 4 $\sin^2$ 2x]

On sait que $\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2 2x=1-\cos 4x$ Donc f(x) = cos x [3 -2 (1 – cos 4 x)]
= cos x [1 + 2 cos 4 x] . Et par suite f(x) = cos x (1+ 2 cos 4 x)

2) f (x) = 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=0 \\ ou \\ 1+2\cos 4x=0 \end{cases}$

Cos x = 0 ⇔ $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$; 1 + 2 cos 4 x = 0 ⇔ cos 4 x = $-\frac{1}{2}$ ⇔ cos 4x = cos $\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4x=\frac{2\pi}{3}+2K\pi \\ 4x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases} K\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \\ x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$ Donc l'ensemble de solution dans de f(x) = 0 est

$\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) f(x) = cos x' (1 + 2 cos 4x) ; Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. *on a* $\cos x \geq 0$

$\begin{cases}1+2\cos 4x=0 \\ x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{\pi}{3}$ d'après 2)

Soit le système suivant $\begin{cases}1+2\cos 4x<0 \\ x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 4x<-\frac{1}{2} \\ 4x\in[0, 2\pi]\end{cases} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}<4x<\frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}<x\leq\frac{\pi}{3}$

On obtient donc le tableau suivant

X	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$	
Cos x		+		+		+	0	-
1+2cos4x		+	0	-	0	+		
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	

$f(x)\geq 0$ si $x\in\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$; $f(x)\leq 0$ si $x\in\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

B/ $g(x)=\frac{\sin x-\sin 3x+\sin 5x}{f(x)}$

<u>Exercice N°26 :</u> $f(x)=1-\cos 2x+\sin 2x$

1) a) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

b) $f(x)=1-\cos 2x+\sin 2x=2\sin^2 x+2\sin x\cos x=2\sin x(\sin x+\cos x)$

$=2\sqrt{2}\sin x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=2\sqrt{2}\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

c) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Donc $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2}{2}$.

2) a) $g(x)=\frac{f(x)}{2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$; cos x = 0 signifie que $x=\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ signifie que $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+k\pi$ signifie

que $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$

Donc $D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{3\pi}{4}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $g(x)=\frac{2\sqrt{2}\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$; $g(x)\leq 0$

$S_{\mathbb{R}}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi; 2k\pi\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\right]\right)$

<u>Exercice N° 27 :</u> 1) a/ Il faut que cos x ≠ 0 et sinx ≠ 0 ; cos x = 0 ⇔ $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; sin x = 0 ⇔

$x=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. Donc $D_f=IR/\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$

b/ $f(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos^2(x+\pi)}-\frac{\cos(x+\pi)}{\sin^2(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{\cos^2 x}-\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$

Aussi $f(x+\pi)=-f(x)$

2) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\cos^2 x\sin^2 x}=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\cos x.\sin x+\cos^2 x)}{\sin^2 x.\cos^2 x}$

$=\frac{(\sin x-\cos x)(1+\sin x\ \cos x)}{(\sin x.\cos x)^2}=\frac{(\sin x-\cos x)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2}=\frac{4(\sin x-\cos x)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{\sin^2 2x}$

$=\frac{(\sin x-\cos x)\ (4+2\sin 2x)}{\sin^2 2x}=\frac{(\sin x-\cos x)\ (4+2\sin 2x)}{\sin^2 2x}$

3) a/ sin x − cos x = 0 ⇔ sinx = cosx

$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x=x+2k\pi \\ \frac{\pi}{2}-x=-x+2k\pi\end{cases} K\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ 0=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad \textit{impossible}\end{cases} K\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+K\pi$, $K\in\mathbb{Z}$ Les solutions dans $[0, \pi]$ de sinx − cos x = 0 sont $\frac{\pi}{4}$

b/ $f(x)=\dfrac{(\sin x-\cos x)(4+2\sin 2x)}{\sin^2 2x}$

* On a $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\sin x-\sin\dfrac{\pi}{4}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\text{Sinx}-\text{cosx}\geq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi\leq x-\dfrac{\pi}{4}\leq \pi+2k\pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4}+2k\pi\leq x\leq\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi$

* On a $-1\leq \sin 2x\leq 1 \Leftrightarrow 2\leq 4+2\sin 2x\leq 6$ Donc $4+2\sin 2x\geq 0$

X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sinx – cosx	-	0 +	+	
4+2sin2x	+	+	+	
f(x)	-	0 +	+	

4) $g(x)=\sqrt{f(x)}$; g est bien définie $\Leftrightarrow f(x)\geq 0$; $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right[/ \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

Donc $D_g\cap[0,\pi]=\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right[/ \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}\cap[0,\pi]=\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right[/ \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

Exercice N° 28:

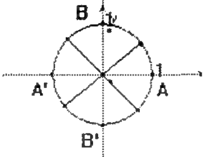
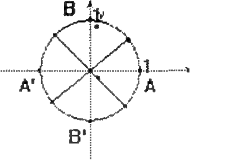
1) $\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x=2\left(\dfrac{1}{2}\cos 3x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\cos 3x-\sin\dfrac{\pi}{3}\sin 3x\right)=2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x=2\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+\dfrac{\pi}{3}=x+\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\\ 3x+\dfrac{\pi}{3}=-x-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases}; K\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\end{cases}, k\in\mathbb{Z}\ S_{IR}=\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) a/ $1-2\sin^2 x=0 \Leftrightarrow \sin^2 x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\pi-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}; k\in\mathbb{Z}$ ou $\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\pi+\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases} k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\end{cases} k\in\mathbb{Z}$ ou $\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\end{cases} k\in\mathbb{Z} \Rightarrow D_f=IR/\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ -\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b/ on a $\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x=2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Signifie $\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x-2\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)-2\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$=2\left(\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)=2\left(-2\sin\dfrac{3x+\frac{\pi}{3}+x+\frac{2\pi}{3}}{2}\ \sin\dfrac{3x+\frac{\pi}{3}-x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)$

$=-4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-4\cos 2x.\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Donc $f(x)=\dfrac{-4\cos 2x\ .\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-2\sin^2 x}=\dfrac{-4\cos 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos 2x}=-4\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

c) $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=-4\sin\left(\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}\right)=-4\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=4\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. D'autre part :

$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{4}-2\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}-2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}+2\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$; D'où

$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$;

$4\sin\dfrac{\pi}{12}=\sqrt{6}-\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; $\cos\dfrac{\pi}{12}=\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\pi}{12}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

d) $(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x\leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)\cos x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)\sin x\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

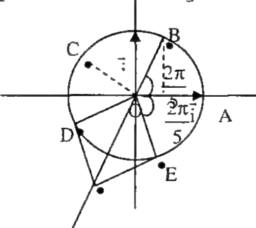
$\Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{12}\cos x+\sin\dfrac{\pi}{12}\sin x\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)\leq\cos\dfrac{\pi}{4}$. Soit E et F deux points du cercle trigonométrique d'abscisse $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ les images des solutions est l'arc $\widehat{FBE}$.

$\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\leq x-\dfrac{\pi}{12}\leq\dfrac{7\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\leq x\leq\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow S_{IR}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ \dfrac{11\pi}{6}+2k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$

Exercice N°29 : $\overline{OA}=\vec{i}$; $\left(\widehat{\vec{i};\overline{OB}}\right)\equiv\dfrac{2\pi}{5}[2\pi]$; $\left(\widehat{\vec{i};\overline{OC}}\right)\equiv\dfrac{4\pi}{5}[2\pi]$

1) $A(1;0)$; $B\left(\cos\dfrac{2\pi}{5};\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)$; $C\left(\cos\dfrac{4\pi}{5};\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$

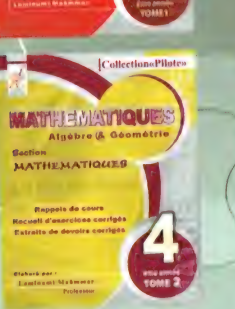
2) $D\left(\cos\dfrac{6\pi}{5};\sin\dfrac{6\pi}{5}\right)$; $E\left(\cos\dfrac{8\pi}{5};\sin\dfrac{8\pi}{5}\right)$



Collection «Pilote»

MATHEMATIQUES







9789973560827

ISBN: 978-9973-56-082-7

Depot légal: quatrieme trimestre 2009

8D:500

قرطاج
للنشر والتوزيع

نهج حفوز عمارة أنيس3000صفاقس
الهاتف 117 222 74 907 227 74
فاكس 855 200 74
الجوال 721 418 98 460 677 97

مطبعة التسفير الفني
الهاتف : 30 20 43 74 216

3) a) $\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{BO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OD};\vec{i}}\right)+\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{BO}}\right)[2\pi] \equiv -\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OD}}\right)+\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OB}}\right)+\pi[2\pi]$

$\equiv -\frac{6\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}+\pi[2\pi] \equiv \frac{\pi}{5}[2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{BO};\overrightarrow{OE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BO};\vec{i}}\right)+\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OE}}\right)[2\pi] \equiv -\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OB}}\right)+\pi+\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OE}}\right)[2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{5}+\frac{8\pi}{5}+\pi[2\pi] \equiv \frac{\pi}{5}[2\pi]$

$\equiv \frac{6\pi}{5}+\pi[2\pi] \equiv \frac{\pi}{5}[2\pi]$. D'où $\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{BO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BO};\overrightarrow{OE}}\right)[2\pi]$

b) On a $\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{BO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BO};\overrightarrow{OE}}\right)[2\pi]$ Soit H le point tel que $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$, on a ODHE est un losange car est un parallélogramme tel que $OD=OE$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{BE}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OH}}\right)[2\pi]$ signifie que $\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OE}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OD}}\right) \equiv 2\pi[2\pi]$ donc $2\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OD}}\right)+2\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OH}}\right) \equiv 2\pi[2\pi]$ signifie que $2\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OH}}\right) \equiv 2\pi+k\pi$ d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OH}}\right) \equiv \pi+k\pi$ signifie que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires.

c) On a $\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{5}[2\pi]$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{5}[2\pi]$.

On a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OB}; \alpha \in IR$

On a $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\alpha'\overrightarrow{OB}; \alpha' \in IR$

Donc $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OB}=\alpha\overrightarrow{OB}+\alpha'\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}=(\alpha+\alpha'+1)\overrightarrow{OB}$

$=\beta\overrightarrow{OB}$ d'où $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{OB}$.

4) On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \frac{2\pi}{5}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{5}[2\pi]$ donc $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ de même On a $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};-\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \frac{\pi}{5}[2\pi]$ et $\left(\widehat{-\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}}\right) \equiv \frac{\pi}{5}[2\pi]$ Donc $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{OA}$ et par suite $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ est colinéaires avec $\overrightarrow{OA}$.

5) a) On a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OB}$ et à $\overrightarrow{OA}$. Puisque $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{0}$ est le seul vecteur colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ par suite $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$

b) de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$ on aura $\begin{cases} 1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0 \\ 0+\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{5}=0 \end{cases}$

6) a) On a : $1+\cos\frac{4\pi}{5}=1+\cos\left(2\times\frac{2\pi}{5}\right)=2\cos^2\frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow \cos\frac{4\pi}{5}=2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1$;

$\cos\frac{8\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{6\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\frac{4\pi}{5}$

$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0 \Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{5}+\left(1+\cos\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$

$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{5}+1+2\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}=0 \Leftrightarrow 1+2\cos\frac{4\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}=0$

$\Leftrightarrow 1+2\left(2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1\right)+2\cos\frac{2\pi}{5}=0 \Leftrightarrow 4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0$

$\frac{2\pi}{5}$ est une solution de l'équation $4X^2+2X-1=0$

b) $4X^2+2X-1=0$; $\Delta=20; \sqrt{\Delta}=2\sqrt{5}$; $X_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $X_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

On a $\frac{2\pi}{5} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\frac{2\pi}{5}>0$ signifie que $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

7) $0 \le 4\cos x+2 \le 1+\sqrt{5}$ signifie que $-2 \le 4\cos x \le -1+\sqrt{5}$ signifie que $-\frac{1}{2} \le \cos x \le \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Donc $S_{[0;2\pi[}=\left[\frac{2\pi}{5};\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3};\frac{8\pi}{5}\right]$

Exercice N°30 : $f(x)=\cos 2x-3\cos x+2=1+\sin 2x$

1) a) $(\cos x+\sin x)^2=\cos^2 x+\sin^2 x+2\cos x\sin x=1+\sin(x+x)=1+\sin 2x$

b) $\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)^2=1+\sin\frac{\pi}{6}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\cos\frac{11\pi}{6}-3\cos\frac{11\pi}{12}+2=\frac{\sqrt{3}}{2}-3\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)+2=\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cos\frac{\pi}{12}+2$

$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\frac{7\pi}{12}-3\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-3\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cos\frac{5\pi}{12}+2$

$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\frac{5\pi}{16}-3\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-3\cos\frac{5\pi}{12}+2$

$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)+f\left(\frac{7\pi}{12}\right)-f\left(\frac{5\pi}{12}\right)-f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cos\frac{\pi}{12}+2-\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cos\frac{5\pi}{12}+2+3\cos\frac{5\pi}{12}-2-\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cos\frac{\pi}{12}-2$

$=3\cos\frac{\pi}{12}+3\cos\frac{5\pi}{12}+3\cos\frac{5\pi}{12}+3\cos\frac{\pi}{12}=3\cos\frac{\pi}{12}+3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)+3\cos\frac{\pi}{12}+3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$

$=6\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)=6\times\frac{\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{6}$

2) a) $f(x)=\cos 2x-3\cos x+2$

$=2\cos^2 x-1-3\cos x=2\cos^2 x-3\cos x+1$

b) $f(x)>0$; $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$ signifie que : $2(\cos x-1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0$

$\cos x-1=0$ et $x \in [0;2\pi]$ signifie que $x=0$ ou $x=2\pi$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\cos x-1$		$-$		$-$		$-$	0
$\cos x-\frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(\cos x-1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0

$\cos x - \frac{1}{2} = 0$ et $x \in [0;2\pi]$ signifie que $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

3) $g(x) = \frac{\tan 2x}{\sqrt{f(x)}} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x\sqrt{f(x)}}$

Exercice N°31 :

1) a $\cos(2x) = 0$ signifie que $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

b) $2\sin 2x + \sqrt{3} = 0$ signifie $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ signifie que $\begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ signifie que $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{4\pi}{6} + k\pi \end{cases}$ $; k \in \mathbb{Z}$

Donc $S_{IR} = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2) $\sin(4x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0$ signifie $\cos 2x\left(2\sin 2x + \sqrt{3}\right) = 0$

signifie que $\cos 2x = 0$ ou $2\sin 2x + \sqrt{3} = 0$; $0 \le \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \le \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le k \le \frac{3}{2}$ $k = 0$ signifie que $x = \frac{\pi}{4}$;

$k = 1$ signifie que $x = \frac{3\pi}{4}$

$0 \le -\frac{\pi}{6} + k\pi \le \pi$; $-\frac{1}{6} \le k \le \frac{7}{6}$ Donc $k = 0$ ou $k = 1$; $k = 0; x = -\frac{\pi}{6}$; $k = 1; x = \frac{5\pi}{6}$

$0 \le \frac{2\pi}{3} + k\pi \le \frac{\pi}{2}$ signifie que $-\frac{2}{3} \le k \le \frac{1}{3}$ donc $k = 0$ signifie que $x = \frac{2\pi}{3}$ Donc $S_{[0;\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right\}$

Exercice N°32 :

1) a $f(x) = 1 - \sin 2x + \cos 2x = 1 + \cos 2x - \sin 2x = 2\cos^2 x - 2\sin x.\cos x = 2\cos x(\cos x - \sin x)$

$= 2\cos x\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)\right) = 2\sqrt{2}\cos x\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) = 2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $f(x) = 0$ signifie que $\cos x = 0$ ou $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

* $\cos x = 0$ signifie que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

* $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ signifie que $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$ signifie que $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ signifie que :

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ .Dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + k\pi \le \frac{\pi}{2}$ signifie que $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2} + k \le \frac{1}{2}$ signifie que $-1 \le k \le 0$;

$x = -1$ ou $x = 0$ $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = -\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + k\pi \le \frac{\pi}{2}$ signifie que $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{4} + k \le \frac{1}{2}$ signifie

que $-\frac{3}{4} \le k \le \frac{1}{4}$ donc $k = 0$ et par suite $x = \frac{\pi}{4}$ d'où $S_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} = \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}$

2) $g : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to IR$ tel que $x \mapsto \frac{\sqrt{2}\cos 2x}{f(x)}$. a) $D_g = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}$.

b) $g(x) = \frac{\sqrt{2}\cos 2x}{f(x)} = \frac{\sqrt{2}\cos 2x}{2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos 2x}{2\cos x\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

On a : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$

$= 2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

$g(x) = \frac{\cos 2x}{2\cos x\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$

c) $g\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6}}{f\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{18}}{2} = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}$ d'autre

part $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\tan x - \frac{\sqrt{2}}{2}$; $g\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\tan\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{18}}{2} = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}$ signifie que

$\frac{\sqrt{2}}{2}\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{2}$ signifie que $\tan\frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - 2$

$g(x) = 1$ signifie que $\frac{\sqrt{2}}{2}\tan x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ signifie que $\tan x = 1$ signifie que $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$S_{IR} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$; $D_g = \left\{-\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Exercice N°33 : $A(x) = \cos 2x + \sin 2x$; $x \in [0;2\pi[$

1) $A(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1$; $A\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$;

2) $A(x) = 0$ signifie que $-\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 1$ signifie que $-\tan(2x) = 1$ signifie que $-\tan 2x = \tan\frac{\pi}{4}$ signifie que

$\tan(-2x) = \tan\frac{\pi}{4}$ signifie que $-2x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ signifie que $x = -\frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

$0 \le -\frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2} < 2\pi$ signifie que $0 \le \frac{1}{8} - \frac{k}{2} < 2$ signifie que $\frac{1}{8} \le -\frac{k}{2} < 2$ signifie que $-\frac{1}{4} \ge k > -4$

Donc $k = -3 \Leftrightarrow x = \frac{5}{8}\pi$; $k = -2 \Leftrightarrow x = \frac{7}{8}\pi$; $k = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}\pi$

3)a) $A(x)=\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x)=\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{4}\sin 2x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

b) $A(x)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

4) $A(x)\geq 1$ signifie que $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$ signifie que $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\geq\sin\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}\leq 2x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Exercice N°34 si n = 1 on a cosx-sinx = 1 soit cos(x+π/4)=cos(π/4) soit x=2kπ ou x = -π/2+2kπ (k décrivant $\mathbb{Z}$)
si n= 2 on a $\cos^2x-\sin^2x = 1$ et $\cos^2x+\sin^2x = 1$ ce qui donne cosx= 1 ou -1 et sinx = 0, soit x =kπ.
Pour n ≥3
On va utiliser le résultat suivant si $0 < x < 1$ alors $x^{n+1} < x^n$.
Supposons $0 < |\cos x| < 1$; on a aussi $0 < |\sin x| <1$ et $|\cos x|^n < |\cos x|^2$, $|\sin x|^n < |\sin x|^2$.
Mais pour tout réel u on a u ≤ |u| et -u ≤|u| d'où :
$\cos^n x-\sin^n x <= |\cos^n x|+|\sin^n x| = |\cos x|^n+|\sin x|^n < |\cos x|^2+|\sin x|^2$
Enfin $|\cos x|^2+|\sin x|^2 = \cos^2x+\sin^2x = 1$ et $\cos^n x-\sin^n x < 1$: l'équation proposée n'a donc pas de solutions.
Pour n ≥3 l'équation ne peut admettre des solutions que si |cosx| = 0 ou 1 : regardons s'il y a effectivement des solutions.
Si cosx = 0 alors sinx = 1 ou -1 : si sinx = 1 il faut donc que $-(1)^n=1$ ce qui est impossible et si sinx = -1 il faut $-(-1)^n=1$ qui n'est possible que si n est impair.
Si cosx = 1 alors sinx = 0 et l'équation est effectivement vérifiée pour tout n
Si cosx = -1 alors sinx = 0 et l'équation s'écrit $(-1)^n=1$ et elle n'est vérifiée que si n est pair
Finalement il y a 3 sortes de solutions
n est impair et cosx=0, sinx = -1 soit x = -π/2 + 2kπ
n pair et cosx = -1 et sinx =0 soit x = π + 2kπ
n quelconque et cosx = 1 et sinx = 0 soit x =2kπDonc pour n ≥3 les solutions de l'équation proposée sont si n pair : x = kπ et si n impair x =2kπ ou x = -π/2 + 2kπ (en fait on peut vérifier, voir plus haut, que c'est vrai aussi pour n =1 et n = 2).

Exercice N°35 Remarquons d'abord que la double inégalité de l'énoncé implique $\cos(x)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$, et comme on travaille dans [0;2π] on a obligatoirement x dans [π/4;7π/4] et donc l'ensemble solution cherché est un sous-ensemble de [π/4;7π/4] : en fait on va montrer que c'est tout [π/4;7π/4].
Pour faciliter la lecture de ce qui suit, il est conseillé de dessiner un cercle trigonométrique gradué avec tous les multiples de π/4 inférieurs à 2π et en faisant apparaître évidemment les abscisses $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Posons $y=|(\sqrt{1+\sin(2x)})-\sqrt{(1-\sin(2x))}|$

$y^2=1+2\sin(2x)-2\sqrt{(1-\sin2(2x))}+1-2\sin(2x)=2(1-\sqrt{\cos^2(2x)})=2(1-|\cos(2x)|)=2(1-|2\cos^2(x)-1|)$

On remarque que l'expression située dans la valeur absolue est la moitié de la différence des carrés des termes extrêmes de la double inégalité de l'énoncé : pour cette raison on va envisager deux cas, selon que cos(x) est positif ou négatif.
cas 1 : cos(x)≥0⇔x∈[0;π/2]∪[3π/2;2π]
Puisque l'inégalité demandée entraîne $2\cos(x)\leq\sqrt{2}$, soit (rappel : la fonction $x\to x^2$ conserve l'ordre sur R^+ **et le change sur** R^-) $\cos^2(x)\leq 1/2\Leftrightarrow 2\cos^2(x)-1\leq 0$, on a $y^2=2(1-(1-2\cos^2(x))=4\cos^2(x)$; y étant positif ou nul on **en déduit** y=2cos(x) et la double inégalité à résoudre, dans ce cas 1, est donc $2\cos(x)\leq 2\cos(x)\leq\sqrt{2}$: elle

se réduit à la seule inégalité $\cos(x)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$, et donc l'ensemble solution dans ce cas 1 est
S_1=[π/4;π/2]∪[3π/2;7π/4].
cas 2 cos(x)<0⇔x∈]π/2;3π/2[.
Là, le fait que $2\cos(x)\leq\sqrt{2}$ ne permet pas d'en déduire qu'obligatoirement $\cos^2(x)\leq 1/2$ (puisque cos(x) et √2/2 sont de signes contraires), d'où deux sous-cas, selon que $\cos^2(x)\leq 1/2$ ou que $\cos^2(x)>1/2$.

cas 2.1 $\cos^2(x)\leq 1/2$c'est équivalent à $|\cos(x)|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$; et comme, pour k≥0, |u| ≤k⇔u∈[-k;k], ce cas 2.1 est équivalent à dire $\cos(x)\in[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}]$ et cos(x)<0 ⇔$\cos(x)\in[-\frac{\sqrt{2}}{2};0[$⇔ x∈]π/2;3π/4]∪[5π/4;3π/2[.
Comme dans le cas 1 on a encore $y^2=4\cos^2(x)$, mais cette fois y=-2cos(x) et la double inégalité à résoudre devient 2cos(x)≤−2cos(x)≤√2 : la 1ière inégalité est toujours vraie (un négatif ou nul est inférieur ou égal à un positif ou nul) et donc il ne reste que l'inégalité $\cos(x)\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui est encore toujours vraie dans ce cas 2.1.L'ensemble solution dans le cas 2.1 est donc $S_{2.1}$=]π/2;3π/4]∪[5π/4;3π/2[.
cas 2.2 $\cos^2(x)>1/2$

En passant à la racine carrée, c'est équivalent à $|\cos(x)|>\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos(x)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x)>\frac{\sqrt{2}}{2}$ (rappel : k étant positif on a |u|>k⇔u∈]−∞;-k[∪]k;+∞[; c'est vrai si k≤0, mais la formule n'a pas vraiment d'intérêt car l'union des deux intervalles se réduit alors à R^* si k=0 et à R si k<0).

Mais cos(x)<0 (on est dans le cas 2) et donc il ne reste que $\cos(x)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le cas 2.2 équivaut à x∈]3π/4;5π/4[(puisque dans le cas 2 on a x dans]π/2;3π/2[).
De $\cos^2(x)>1/2$ on tire $2\cos^2(x)-1>0$ et $y^2=2(1-(2\cos^2(x)-1))=4(1-\cos^2(x))=4\sin^2(x)$, soit y=2|sin(x)|.
La double inégalité à résoudre est donc $2\cos(x)\leq 2|\sin(x)|\leq\sqrt{2}$; la 1ière inégalité est toujours vraie car cos(x)<0 et la 2ième équivaut, après élévation au carré, à $\cos^2(x)\geq 1/2$, inégalité qui est encore toujours vérifiée dans ce cas 2.2.L'ensemble solution dans ce cas 2.2 est donc $S_{2.2}$=]3π/4;5π/4[.
Finalement l'ensemble solution demandé est $S=S_1\cup S_{2.1}\cup S_{2.2}$=[π/4;7π/4]
Exercice N°36: Notons a la longueur du côté du carré,
u=angle(DPA), v=angle(APB), w=angle(BPD).,
(1) $a^2=2^2+4^2-16\cos u$, dans le triangle DPA
(2) $a^2=4^2+6^2-48\cos v$, dans le triangle APB
(3) $2a^2=2^2+6^2-24\cos w$, dans le triangle BPD et en remarquant que DB est la diagonale du carré
On en déduit que nécessairement on a : (4) cosv=(2+cosu)/3 et cosw=(4/3)cosu
Mais u+v+w=2π et donc (5) cosu=cos(2π-(v+w))=cos(v+w)=cosvcosw-sinvsinw
sinv et sinw étant positifs (puisque v et w sont dans [0;π]), ils vont s'exprimer à l'aide des fonctions cos et racine carrée : (6) $\sin v=\sqrt{(1-\cos 2v)}$ et $\sin w=\sqrt{(1-\cos 2w)}$
En reportant (6) et (4) dans (5) on va obtenir une équation d'inconnue x=cosu ; on peut penser qu'elle sera trop compliquée, mais en faisant attention elle va permettre de conclure.

Tout d'abord : $\sin v=\sqrt{(1-\frac{(2+x)^2}{9})}=\frac{(\sqrt{(5-4x-x^2)})}{3}$ et $\sin w=\sqrt{(\frac{1-16x^2}{9})}=\frac{(\sqrt{(9-16x^2)})}{3}$. Donc nécessairement, outre le fait que x doit être dans [-1;1], $5-4x-x^2$ et $9-16x^2$ doivent être ≥0 et donc x doit être aussi dans [-

5;1] et dans [-3/4;3/4] (intérieur des racines), et donc nécessairement $x \in [-3/4;3/4]=I$.
Finalement, en posant x=cosu, nécessairement x est dans I et (5) entraîne :

$$(7) : x=(\frac{4}{9})x(2+x)-(\frac{1}{9})\sqrt{(9-16x^2)(5-4x-x^2)} \quad \sqrt{(9-16x^2)(5-4x-x^2)}=4x^2-x$$

Donc on a aussi $4x^2-x$ qui doit être positif ou nul, soit x dans $]-\infty, 0]\cup[1/4;+\infty[$ (extérieur des racines) ; comme x est déjà dans I, x doit être en fait dans $J=[-3/4;0]\cup[1/4;3/4]$. Pour x dans J, les deux membres de (7) sont alors positifs ou nuls, donc en élevant au carré ces deux membres on obtient une équation équivalente à (7) :
(8) : $(9-16x^2)(5-4x-x^2)=(4x^2-x)^2$
On remarque tout de suite qu'en développant, les termes de degré 4 vont disparaître, puisque à gauche et à droite il y aura $16x^4$: (9) : $72x^3-90^2-36x+45=0$
Certes, cette dernière équation est du 3ième degré, mais il saute aux yeux que 72 est le double de 36, pour 90 et 45 On exploite cela en factorisant 36 et 45, et l'équation devient $36x(2x^2-1)+45(1-2x^2)=0$, et (9) s'écrit

(10) : $(2x^2-1)(36x-45)=0$ Les solutions de (10) sont alors faciles à déterminer : $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{45}{36}$; mais une solution de (10) est solution de (7) si et seulement si elle est dans J, donc les seules solutions de (7) sont $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .Donc nécessairement cosu=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ou $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ soit <u>nécessairement u=π/4 ou u=3π/4</u>, puisque u est dans [0;π].Mais laquelle de ces valeurs est la bonne? Ou ces deux valeurs sont-elles effectivement possibles pour u?N'oublions pas qu'en toute rigueur on a simplement justifié que si la figure était vraie, alors x=cosu était solution de (10) et dans J.

<u>En fait u=π/4 n'est pas possible</u> : en effet elle conduit à $a^2=20-8\sqrt{2}$ donc $a^2+2^2=24-8\sqrt{2}<4^2$; or $2\times a\times 2\cos(\text{angle}(ADP))=a^2+2^2-4^2<0$, d'où cos(angle(ADP))<0 et angle(ADP) est obtu, et donc P serait à l'extérieur du carré Donc la seule possibilité pour u est u=3π/4. Mais u est-il effectivement égal à 3π/4?
A mon avis il y a lieu de s'en assurer en faisant une réciproque ; en effet on vient de voir que u=π/4 ne convenait pas, pourquoi u=3π/4 conviendrait forcément?
Prenons u=3π/4, alors cette fois $a^2=20+8\sqrt{2}$, $2\times a\times 2\cos(\text{angle}(ADP))=a^2+2^2-4^2=8+8\sqrt{2}>0$ et angle(ADP) est bien aigu cette fois.
En outre $2\times a\times 4\cos(\text{angle}(DAP))=a^2+4^2-2^2=32+8\sqrt{2}>0$ et angle(DAP) est aussi aigu, avec $\cos(\text{angle}(DAP))=(4+\sqrt{2})/a$.
On n'a donc pas d'impossibilité flagrante comme ci-dessus.
Considérons alors le carré ABCD avec $AD^2=a^2=20+8\sqrt{2}$, et P le point situé à droite de (AD) tel que DP=2, PA=4 : il existe et est unique (on considère les cercles de centre D de rayon 2 et de centre A de rayon 4 qui sont sécants en deux points car a<2+4, puisque $a^2-36=8(\sqrt{2}-2)<0$, et un seul de ces points est à droite de (AD)) ; en outre P est bien à l'intérieur du carré (car 2 et 4 sont inférieurs à a) et on a bien sûr angle(DPA)= 3π/4, puisque $\cos(\text{angle}(DPA))=(2^2+4^2-AD^2)/(2\times2\times4)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Mais a-t-on PB=6?
$PB^2=4^2+a^2-2\times a\times 4\cos(\text{angle}(PAB))$; mais cos(angle(PAB))=cos(π/2-angle(DAP))=sin(angle(DAP)), d'où (voir plus haut les valeurs de a^2 et cos(angle(DAP)))

$$PB^2=36+8-8a\times\sqrt{(1-\frac{(4+\sqrt{2})^2}{a^2})}=36+8\sqrt{2}-8\sqrt{(a^2-18-8\sqrt{2})}=36+8\sqrt{2}-8\sqrt{2}=36$$ et on a bien PB=6.

En conclusion u=angle(DPA)=3π/4.

Devoir De contrôle N° 1 exemple 1

<u>Exercice N° 1</u> : 1)c) ; 2) b) ; 3) c) ; 4) a) ; 5) c) ; 6) b)

<u>Exercice N° 2 :</u> $g(x)=x^2-5x+6$ et $h(x)=\frac{2x}{x^2-5x+6}$

1. $g(x)+\frac{1}{4}=x^2-5x+6+\frac{1}{4}=\frac{4x^2-20x+25}{4}=\frac{(2x-5)^2}{4}\geq 0, \forall x\in R$ Donc $g(x)\geq -\frac{1}{4}, \forall x\in R$. Par la suite g est minorée sur R.

2. $g(x)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow g(x)+\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow (2x-5)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ Donc $g(x)\geq g(\frac{5}{2}), \forall x\in R$. Par la suite $(-\frac{1}{4})$ est un minimum sur R. $h(x)=\frac{2x}{x^2-5x+6}=\frac{2x}{g(x)}$. On a : $g(x)\geq -\frac{1}{4}, \forall x\in R$ (2)

<u>Signe de g(x) :</u> Posons $g(x)=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$; $\Delta=25-24=1$ .Donc : $x'=\frac{5-1}{2}=2$; $x''=\frac{5+1}{2}=3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	-	0	+	

Donc $\forall x\in]2;3[$, on a : g(x)<0 (1)

D'après (1) et (2), on a : $\frac{1}{g(x)}\leq -4$ et on a : $4<2x\leq 6$ donc $4<\frac{2x}{g(x)}\leq -\frac{2}{3}\Rightarrow h(x)\leq -\frac{2}{3}, \forall x\in]2;3[$.

Par la suite $(-\frac{2}{3})$ est un majorant de h sur]2;3[.

<u>Exercice N 3 :</u>

$f(x)=\frac{1}{x-1}$ et $g(x)=(x-1)^2+1$

1) a) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g. Puisqu'il existe un seul point d'intersection, alors l'équation $f(x)=g(x)$ admet dans IR une solution unique α.

b) $f(x)=g(x), x\in R\setminus\{1\}\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}=(x-1)^2+1\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}=x^2-2x+2$
$\Leftrightarrow 1=(x-1)(x^2-2x+2)\Leftrightarrow 1=x^3-2x^2+2x-x^2+2x-2$
$\Leftrightarrow 1=x^3-3x^2+4x-2\Leftrightarrow x^3-3x^2+4x-3=0$ Donc α est l'unique solution $\alpha\in R$ de l'équation : $x^3-3x^2+4x-3=0$.
c) Posons $h(x)=f(x)-g(x)$; $h(1,6)\times h(1,7)<0$ donc $1,6<\alpha<1,7$.

3) $f([-1;1[)=]-\infty;-\frac{1}{2}]$; $g([\frac{1}{2};2])=?$

Si $\frac{1}{2}\leq x\leq 1\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq x-1\leq 0\Rightarrow 0\leq (x-1)^2\leq \frac{1}{4}\Rightarrow 1\leq (x-1)^2+1\leq \frac{5}{4}\Rightarrow 1\leq g(x)\leq \frac{5}{4}$

Si $1\leq x\leq 2\Rightarrow 0\leq x-1\leq 1\Rightarrow 0\leq (x-1)^2\leq 1\Rightarrow 1\leq (x-1)^2+1\leq 2$. Donc $g([\frac{1}{2};2])=[1;2]$

4. On a : $1 \le f(x) \le f(\alpha) \Leftrightarrow 1 \le \frac{1}{x-1} \le f(\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{f(\alpha)} \le x-1 \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(\alpha)}+1 \le x \le 2$

Donc $x \in [\frac{1}{f(\alpha)}+1;2]$ D'où l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[1; f(\alpha)]$ est l'intervalle $[\frac{1}{f(\alpha)}+1;2]$.

Exercice N° 4 : $(\vec{CA}, \hat{\vec{CI}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $CA = 2\sqrt{2}$

1. $\vec{IB}.\vec{IA} = -\vec{IA}.\vec{IA} = -IA^2 = -2AC^2 = -2(2\sqrt{2})^2 = -16$

$\vec{CA}.\vec{CB} = \vec{CA}.\vec{CA} + \vec{CA}.\vec{AB} = CA^2 - \vec{AC}.\vec{AB} = CA^2 - AC.AB.\cos\frac{\pi}{4}$

$= CA^2 - AC.AB.\frac{AC}{AI} = CA^2 - AC^2.\frac{2AI}{AI} = CA^2 - 2AC^2 = -AC^2 = -8$

2.

a. Dans le triangle rectangle AHB, on a : $\sin\hat{A} = \frac{BH}{AB} \Leftrightarrow BH = AB.\sin\frac{\pi}{4} = 2AI.\sin\frac{\pi}{4}$

(or $AI^2 = 2AC^2 = 16$ donc $AI = 4$) $\Rightarrow BH = 2\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ or ABH est isocèle et rectangle en H donc $BH = HA = 4\sqrt{2}$. D'où $HC = AH - AC = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

b. or $CB^2 = HC^2 + HB^2 = (2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 8 + 32 = 40$. Donc $BC = 2\sqrt{10}$

c. $\cos(B\hat{C}I) = \sin(B\hat{C}H) = \frac{BH}{BC} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. Soit G le centre de gravité du triangle ABH. $f : P \to R$; $M \mapsto f(M) = \vec{MA}.\vec{MB} - \frac{2}{3}\vec{HI}.\vec{MG}$

a. $f(H) = \vec{HA}.\vec{HB} - \frac{2}{3}\vec{HI}.\vec{HG} = 0 - \frac{2}{3}.\vec{HI}.\frac{2}{3}.\vec{HI} = -\frac{4}{9}HI^2$

(or $HI = IA = IB = 4$) donc $f(H) = -\frac{4}{9}\times16 = -\frac{64}{9}$

b. $f(G) = \vec{GA}.\vec{GB} - \frac{2}{3}\vec{HI}.\vec{GG} = \vec{GA}.\vec{GB} = (\vec{GI}+\vec{IA}).(\vec{GI}+\vec{IB})$

$= GI^2 + \vec{GI}.\vec{IB} + \vec{IA}.\vec{GI} + \vec{IA}.\vec{IB} = GI^2 + \vec{GI}(\vec{IA}+\vec{IB}) - IA^2 = GI^2 - IA^2$

$f(G) = (\frac{1}{3}HI)^2 - 16 = \frac{HI^2}{9} - 16 = \frac{16}{9} - 16 = -\frac{128}{9}$

c. $f(M) = \vec{MA}.\vec{MB} - \frac{2}{3}\vec{HI}.\vec{MG} = (\vec{MG}+\vec{GA}).(\vec{MG}+\vec{GB}) - \frac{2}{3}\vec{HI}.\vec{MG}$

$= MG^2 + \vec{MG}.\vec{GB} + \vec{GA}.\vec{MG} + \vec{GA}.\vec{GB} - \frac{2}{3}\vec{HI}.\vec{MG} = MG^2 + f(G) + \vec{MG}.(\vec{GA}+\vec{GB} - \frac{2}{3}\vec{HI})$

(or $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GH} = 0$ donc $\vec{GA}+\vec{GB} = -\vec{GH}$) $\Rightarrow f(M) = MG^2 + f(G) + \vec{MG}.(-\vec{GH} - \frac{2}{3}\vec{HI})$

$= MG^2 + f(G) + \vec{MG}.(-\vec{GH}+\vec{HG})$: $f(M) = f(G) + MG^2$

d. $(E) = \left\{M \in P / f(M) = -\frac{119}{9}\right\}$

$M \in (E) \Leftrightarrow f(M) = -\frac{119}{9} \Leftrightarrow f(G) + MG^2 = -\frac{119}{9} \Leftrightarrow MG^2 = -\frac{119}{9} + \frac{128}{9}$

$\Leftrightarrow MG^2 = 1 \Leftrightarrow MG = 1 \Leftrightarrow M \in C_{(G,1)}$. Donc (E) est le cercle de centre G et de rayon 1.

Devoir De contrôle N° 1 exemple 2

Exercice N° 1 : 1) c) ; 2) a) ; 3) b) et c) ; 4) c)

Exercice N° 2 : Soit g la restriction de f à $]0;+\infty[$; $a \in]0;+\infty[$; $b \in]0;+\infty[$.

a. $g(a) - g(b) = 2a + \frac{1}{a} - 2b - \frac{1}{b} = \frac{2a^2+1}{a} - \frac{2b^2+1}{b} = \frac{b(2a^2+1) - a(2b^2+1)}{ab}$

$= \frac{2a^2b - 2ab^2 - (a-b)}{ab} = \frac{2ab(a-b) - (a-b)}{ab} = \frac{(a-b)(2ab-1)}{ab}$

b. Variation de g sur $]0;\frac{1}{\sqrt{2}}]$:

$a \in]0;\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et $b \in]]0;\frac{1}{\sqrt{2}}]$ tel que $a \le b$

On a : $g(a) - g(b) = \frac{(a-b)(2ab-1)}{ab} = \frac{(b-a)(1-2ab)}{ab}$

Donc le signe de g(a)-g(b) dépend du signe de (1-2ab).

On a : $0 < a \le \frac{1}{\sqrt{2}}$; $0 < b \le \frac{1}{\sqrt{2}}$; $0 < ab \le \frac{1}{2}$; $0 < 2ab \le 1$

Donc : $1 - 2ab \ge 0$.

Par la suite $g(a) - g(b) \ge 0 \Leftrightarrow g(a) \ge g(b)$.

Donc g est décroissante sur $]0;\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Variation sur $[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty[$:

On a : $a \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$; $b \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow ab \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2ab \ge 1$ donc $1 - 2ab \le 0 \Rightarrow g(a) \le g(b)$

$\Rightarrow$ g est croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty[$.

c. Si $0 < x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ et g décroissante sur $g(\frac{1}{\sqrt{2}})$ $\Rightarrow g(x) \ge g(\frac{1}{\sqrt{2}})$

or $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ donc $g(x) \ge 2\sqrt{2}$

Si $x \in [\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty[$, on a : $x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ et g croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty[$

Donc $g(x) \ge g(\frac{1}{\sqrt{2}}) \Leftrightarrow g(x) \ge 2\sqrt{2}$.

Conclusion : g est minorée par $2\sqrt{2}$ sur $]0;+\infty[$ et puisque $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$ donc $2\sqrt{2}$ est un minimum de g sur $]0;+\infty[$.

2. Soit h la restriction de f à $]-\infty;0[$

a. On a : $x^2+1 \geq x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \geq |x|$

or $x \in]-\infty;0[\Rightarrow |x| = -x$ donc $\sqrt{x^2+1} \geq -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x \geq 0$

$\Leftrightarrow h(x) \geq 0, \forall x \in]-\infty;0[$ d'où h est minorée par 0 sur $]-\infty;0[$

b. On a : $f(x) \geq 0, \forall x \in]-\infty;0[$ et $f(x) \geq 2\sqrt{2}, \forall x \in]0;+\infty[\Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in]0;+\infty[$ d'où : f est minorée par 0 sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice N°3 :

On a : $\begin{cases} f(x) = x^3+x^2-1 & si \quad x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-1} & si \quad 0 < x \leq 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2-x+1} & si \quad x > 2 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

1.

a. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{7}$ car la fct : $x \to \sqrt{x^2-x+1}$ est continue sur R en particulier en 3.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-1}$?

On a : $\dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-1} = \dfrac{-2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-2x-1}{x+1}, \forall x \in]0;2] \setminus \{1\}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2x-1}{x+1} = -\dfrac{3}{2}$

b.f admet une limite finie en 1 donc elle est prolongeable par continuité en 1 et son prolongement est la fonction g définie par :

$\begin{cases} g(x) = f(x) & si \quad x \neq 1 \\ g(1) = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

2.

a. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^3+x^2-1) = -1$ car la fonction : $x \to x^3+x^2-1$ est continue en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-1} = -1$ car la fct : $x \to \dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-1}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1;-1\}$ en particulier en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-1} = -\dfrac{5}{3} \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{3} \end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

Donc f n'est pas continue en 2.

Exercice N° 4 : :

$AC = a$; $AB = 2a$; $B\hat{A}C = \dfrac{2\pi}{3}$; $I = B * C$

1.

a. $\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC.\cos B\hat{A}C = 2a.a.(-\dfrac{1}{2}) = -a^2$

b. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\vec{AB}.\vec{AC} = 4a^2 + a^2 + 2a^2 = 7a^2 \Rightarrow \boxed{BC = a\sqrt{7}}$

2.

a. $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AI} \Leftrightarrow \vec{AI} = \dfrac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$

b. $\vec{AI}.\vec{AC} = \dfrac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}).\vec{AC} = \dfrac{1}{2}\vec{AB}.\vec{AC} + \dfrac{1}{2}\vec{AC}.\vec{AC} = -\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2} = 0$

Donc $\vec{AI} \perp \vec{AC} \Rightarrow (AI) \perp (AC)$

3.

a. $MB^2 - MC^2 = \|\vec{MB}\|^2 - \|\vec{MC}\|^2 = (\vec{MB} - \vec{MC}).(\vec{MB} + \vec{MC})$

$= (\vec{CM} + \vec{MB}).2\vec{MI} = \vec{CB}.2\vec{MI} = 2\vec{MI}.\vec{CB}$

b. Soit E_1 l'ensemble des points M tel que $MB^2 - MC^2 = 7a^2$

$MB^2 - MC^2 = 7a^2 \Leftrightarrow 2\vec{MI}.\vec{CB} = 7a^2 \Leftrightarrow 2\vec{MI}.\vec{CB} = BC^2$

$\Leftrightarrow 2\vec{MI}.\vec{CB} - \vec{BC}.\vec{BC} = 0 \Leftrightarrow 2\vec{MI}.\vec{CB} + \vec{BC}.\vec{CB} = 0 \Leftrightarrow \vec{CB}.(2\vec{MI} + \vec{BC}) = 0 \Leftrightarrow \vec{CB}.(2\vec{MI} + 2\vec{IC}) = 0$

$\Leftrightarrow 2\vec{CB}.\vec{MC} = 0 \Leftrightarrow \vec{CB}.\vec{MC} = 0 \Leftrightarrow (MC) \perp (CB) \Rightarrow$ E_1 est la droite perpendiculaire à (BC) en C.

4. Soit E_2 l'ensemble des points M tel que $\vec{MA}.\vec{MB} + \vec{MA}.\vec{MC} = 0$

$M \in E_2 \Leftrightarrow \vec{MA}.(\vec{MB} + \vec{MC}) = 0 \Leftrightarrow \vec{MA}.(2\vec{MI}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{MA}.\vec{MI} = 0 \Leftrightarrow \vec{MA}.\vec{MI} = 0 \Rightarrow$ M appartient au cercle de diamètre [AI] : $E_2 = C_{[AI]}$.

5. $E = A * B$; $\vec{AF} = \alpha\vec{AC}$

$\vec{BC}.\vec{EF} = (\vec{BA} + \vec{AC}).(\vec{EA} + \vec{AF}) = \vec{BA}.\vec{EA} + \vec{BA}.\vec{AF} + \vec{AC}.\vec{EA} + \vec{AC}.\vec{AF}$

$= \dfrac{1}{2}BA^2 + \alpha\vec{BA}.\vec{AC} + \dfrac{1}{2}\vec{BA}.\vec{AC} + \alpha.AC^2 = \dfrac{4}{2}a^2 + \alpha.a^2 + \dfrac{1}{2}a^2 + \alpha.a^2$

$= \dfrac{5}{2}a^2 + 2\alpha.a^2 = (\dfrac{5}{2} + 2\alpha).a^2$

$\vec{BC} \perp \vec{EF} \Leftrightarrow \vec{BC}.\vec{EF} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \dfrac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\dfrac{5}{4}}$



Devoir de synthèse N° 1 exemple 1

Exercice N° 1 : 1) Faux ; 2) Faux ; 3) Faux ; 4) Faux
5) Vrai ; 6) Faux ; 7) Faux ; 8)Vrai

Exercice N° 2 : voir Exercice 24« Limites et comportements asymptotiques»

Exercice N° 3 : voir Exercice 15« Angles Orientés»

1421.

Exercice N° 4 :

$AB = 2$; $AC = 1$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ $(A, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AC})$ est un repère orthonormé direct.

1. $A(0;0)$; $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AK}$ donc $B(2;0)$, $C(0;1)$; $L = B * C$ donc $L(1;\frac{1}{2})$

2. $H(x;y)$; $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = -2x + y$; $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH}) = \begin{vmatrix} -2 & x-2 \\ 1 & y \end{vmatrix} = -2y - x + 2 = -x - 2y + 2$

3. $(AH) \perp (BC)$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -2x + y = 0$ (1)

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH}) = 0 \Leftrightarrow -x - 2y + 2 = 0$ (2)

(1) et (2) donnent $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -x - 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$ donc $H(\frac{2}{5};\frac{4}{5})$

4. I est le projeté orthogonal de H sur (AK) donc $I(\frac{2}{5};0)$.

J est le projeté orthogonal de H sur (AC) donc $J(0;\frac{4}{5})$.

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AL} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{10} = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 0$ donc $(IJ) \perp (AL)$

Exercice N°5 :voir Exercice 11 « Limites et comportements asymptotiques»



Devoir de synthèse N° 1 exemple 2

Exercice N° 1 : 1)b) ; 2)c) ; 3) d) ; 4)c) ; 5)c) , 6) a) $(\overline{MA;MB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$; b) $\widehat{BA} \setminus \{A;B\}$

Exercice N° 2 : 1) $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$; $x\in [-1,+\infty[$.

a) La fonction : $x \to \sqrt{x+1}$ est continue sur $[-1,+\infty[$.Donc, la fonction : $x \to \sqrt{x+1}+2$ est continue sur $[-1,+\infty[$.Et pour tout $x\in [-1, +\infty[$; $\sqrt{x+1}+2 \neq 0$ donc la fonction : $x \to \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$ est continue sur $[-1, +\infty[$.

b) Soient a et b deux réels de $[-1, +\infty[$ tel que $a<b \Rightarrow a+1<b+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{a+1} < \sqrt{b+1} \Leftrightarrow \sqrt{a+1}+2 < \sqrt{b+1}+2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a+1}+2} > \frac{1}{\sqrt{b+1}+2} \Leftrightarrow f(a) > f(b)$ D'où f est décroissante sur $[-1, +\infty[$.

On a : $x \geq -1$ et f décroissante sur $[-1, +\infty[$.

Donc $g(x) \leq g(-1) \Leftrightarrow g(x) \leq \frac{1}{2}$.Donc g est majorée par $\frac{1}{2}$ sur $[-1,+\infty[$.

c) On a : $-1 \leq x \leq 0$ et g décroissante $\Leftrightarrow g(-1) \geq g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq g(x) \geq \frac{1}{3}$

d)Donc $g([-1,0])=[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$.

2) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

a) f(x) a un sens ssi $x+1 \geq 0$ et $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ et $x \neq 3 \Leftrightarrow [-1,+\infty[\setminus\{3\}$.Donc $D_f=[-1,+\infty[\setminus\{3\}$.

b) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$, $\forall x\in [-1,+\infty[\setminus\{3\}$

$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$

c) $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{1}{4} \Rightarrow$ f est prolongeable par continuité en 3 et son prolongement est la fonction φ définie par : $\begin{cases} \varphi(x) = f(x) & si \quad x\in [-1,+\infty[\setminus\{3\} \\ \varphi(3) = \frac{1}{4} \end{cases}$

3) Soit h la fonction définie sur $\Re$ par : $\begin{cases} h(x) = f(x) & si \quad x\in]3,+\infty[\\ h(x) = \frac{x^2-9}{x^3-3x^2+x-3} & si \quad x\in]-\infty,3[\\ h(3) = \frac{3}{5} \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 3^+} h(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 1/4$

b) $\lim_{x\to 3^-} h(x)$? si $x\in]-\infty,3[$, on a : $h(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{x^2(x-3)+x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x^2+1)}$

$\Rightarrow h(x)=\frac{x+3}{x^2+1}$; $\lim_{x\to 3^-} h(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x^2+1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

c) $\lim_{x\to 3^-} h(x) \neq \lim_{x\to 3^+} h(x) \Rightarrow$ h n'est pas continue en 3.

Exercice N° 3 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{23\pi}{10}[2\pi]$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv -\frac{47\pi}{10}[2\pi]$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{5}[2\pi]$

2. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{23\pi}{10}[2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{10} - 2\pi[2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{10}[2\pi]$ or $-\frac{3\pi}{10} \in]-\pi;\pi]$ donc $-\frac{3\pi}{10}$ est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

3. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv -\frac{47\pi}{10}[2\pi] \equiv -\frac{7\pi}{10} - 4\pi[2\pi] \equiv -\frac{7\pi}{10}[2\pi]$ or $-\frac{7\pi}{10} \in]-\pi;\pi]$ donc $-\frac{7\pi}{10}$ est la mesure

principale de l'angle orienté $(\vec{AC}, \vec{AE})$.

4. $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AE}}) \equiv (\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) + (\widehat{\vec{AC}, \vec{AE}})[2\pi] \equiv \frac{-3\pi}{10} - \frac{7\pi}{10}[2\pi] \equiv -\pi[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$ Donc $\vec{AB}$ et $\vec{AE}$ sont colinéaires et par la suite A, B et E sont alignés.

$(\widehat{\vec{AC}, \vec{AD}}) \equiv (\widehat{\vec{AC}, \vec{AB}}) + (\widehat{\vec{AB}, \vec{AD}})[2\pi] \equiv \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{10}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ Donc $(AC) \perp (AD)$.

Exercice N° 4 : 1) a) $\Gamma = \left\{ M \in P / \left(\widehat{\overline{MA}; \overline{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \right\}$. Γ est l'arc $\overset{\frown}{AC}$ orienté du cercle passant par A et C tangent en A à la droite Δ dont un vecteur directeur $\vec{u}$ est tel que $\left(\widehat{\vec{u}; \overline{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Or $\left(\widehat{\overline{AB}; \overline{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$;

$(OA) \perp (AB)$ et $O \in$ méd$[AC]$ donc le cercle est le cercle(ξ). Cet arc est privé de A et C. d'où $\Gamma = \overset{\frown}{CA} \setminus \{A; C\}$.

b) D est le point d'intersection de (OB) et Γ.

c) Le triangle ACD est isocèle en D donc

$\left(\widehat{\overline{CA}; \overline{CD}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\widehat{\overline{DC}; \overline{DA}}\right) + k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} + k\pi = \frac{5\pi}{8} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Dans le triangle isocèle la mesure principale de $\left(\overline{CA}; \overline{CD}\right)$ a une valeur dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\frac{5\pi}{8}$ ne peut pas être la mesure principale de cet angle ainsi k est un entier impaire. Posons $k = 2p - 1$;

$\left(\widehat{\overline{CA}; \overline{CD}}\right) = \frac{5\pi}{8} + 2p\pi - \pi = -\frac{3\pi}{8} + 2p\pi \equiv -\frac{3\pi}{8}[2\pi]$ Donc $-\frac{3\pi}{8}$ est la mesure principale de $\left(\widehat{\overline{CA}; \overline{CD}}\right)$.

$\left(\widehat{\overline{CO}; \overline{CD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overline{CO}; \overline{CA}}\right) + \left(\widehat{\overline{CA}; \overline{CD}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{8} \equiv -\frac{\pi}{8}[2\pi]$.

2) a) $(DA) \perp (DL)$ ainsi D appartient au cercle de diamètre $[AL]$; $L \in (OC)$ et $(OC) \perp (OA)$ et $(OL) \perp (OA)$ donc O appartient au cercle de diamètre $[AL]$.

Conclusion : O ; A ; L et D sont sur le cercle de diamètre $[AL]$

b) comme O ; A ; L et D sont sur le même cercle donc $\left(\widehat{\overline{LD}; \overline{LO}}\right) = \left(\widehat{\overline{AD}; \overline{AO}}\right) + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ et comme L et A appartiennent au même arc d'extrémités L et A Alors $\left(\widehat{\overline{LD}; \overline{LO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overline{AD}; \overline{AO}}\right)[2\pi]$

c) $\left(\widehat{\overline{CO}; \overline{CD}}\right) \equiv -\frac{\pi}{8}[2\pi]$; $\left(\widehat{\overline{AD}; \overline{AO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overline{AD}; \overline{AC}}\right) + \left(\widehat{\overline{AC}; \overline{AO}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overline{CA}; \overline{CD}}\right) + \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{8}[2\pi]$

Ainsi $\left(\widehat{\overline{CO}; \overline{CD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overline{AD}; \overline{AO}}\right)[2\pi]$ et comme $\left(\widehat{\overline{LD}; \overline{LO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overline{AD}; \overline{AO}}\right)[2\pi]$ alors $\left(\widehat{\overline{LD}; \overline{LO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overline{CO}; \overline{CD}}\right)[2\pi]$ et comme $O \in [LC]$ alors $\left(\widehat{\overline{LD}; \overline{LO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overline{LD}; \overline{LC}}\right)[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overline{CO}; \overline{CD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overline{CL}; \overline{CD}}\right)[2\pi]$

D'où $\left(\widehat{\overline{CL}; \overline{CD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overline{LD}; \overline{LC}}\right)[2\pi]$ et par suite DCL est un triangle rectangle et isocèle en D.

Ainsi $L \in \gamma$ où γ est le cercle de centre D et de rayon CD.

d) Le triangle ADC est isocèle en D et DC = DL donc AD = DL et par suite le triangle ADL est isocèle en D et de sens direct.

D'où $\left(\widehat{\overline{AD}; \overline{AL}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ or $\left(\widehat{\overline{DA}; \overline{DC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overline{AD}; \overline{CD}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ d'où $\left(\widehat{\overline{AD}; \overline{AL}}\right) \equiv \left(\widehat{\overline{AD}; \overline{CD}}\right)[2\pi]$ et par suite

$\left(\widehat{\overline{AD}; \overline{AL}}\right) - \left(\widehat{\overline{AD}; \overline{CD}}\right) \equiv 0[2\pi]$ donc $\left(\widehat{\overline{CD}; \overline{AL}}\right) \equiv 0[2\pi]$ ce qui permet de conclure que $(DC) // (AL)$

e) Soit $\omega = A * L$; le triangle ADL étant isocèle en L alors $(D\omega) \perp (AL)$. Comme $(DC) // (AL)$ Alors $(D\omega) \perp (CD)$; γ' est de diamètre $[AL]$; ω est son centre $(D\omega) \perp (CD)$ et $D \in \gamma'$ donc (CD) est tangente à γ' en D

Exercice N° 5 : voir Exercice 17« Limites et comportements asymptotiques»

Devoir de contrôle N°2 exemple 1

Exercice N° 1: 1)a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x-1}$ *est la pente de la tangente au point d'abscisse 1 donc* $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = \frac{2-4}{1-0} = -2$

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2}$ *est la pente de la tangente au point d'abscisse 2 donc* $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2} = 0$

c)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'(x)		+		−		+	
f(x)	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

d) $\begin{cases} f(x) = m \\ 0 \langle x \langle 2 \end{cases}$

Si $m \in]0,4[$ l'équation admet une seule solution

Si $m \in]-\infty, 0]$ *ou* $m \in]4, +\infty[$ l'équation n'admet pas de solution

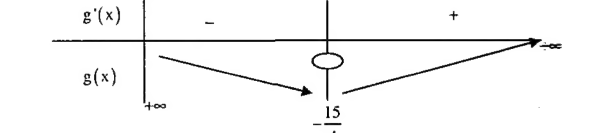
2) $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ On a $f(0) = 4$ *donc* $c = 4$, aussi on a

$f(2) = 8a + 4b + 4 = 0$ *et* $f(1) = a + b + 4 = 2$ donc il suffit de résoudre le système suivant

$\begin{cases} a+b+4=2 \\ 2a+b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$

3) a) g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = f(x)$

b)



Exercice N° 2 :

$f : x \to \frac{(x-3)(4x-3)}{(x-2)^2}$, D_f= IR \{2}

1. $f(x)=\frac{4x^2-3x-12x+9}{x^2-4x+4}=\frac{4x^2-15x+9}{x^2-4x+4}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 4 = 4$; de même $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$

Donc, la droite d'équation y=4 est une asymptote horizontale à C_f au V($\pm\infty$)

$\Delta : x = 2$; On a : $\begin{cases}\lim_{x\to2}(x-3)(4x-3) = -5 \\ \lim_{x\to2}(x-2)^2 = 0 \quad or \quad (x-2)^2 > 0\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to2} f(x) = -\infty$

Donc, la droite Δ : x=2 est une asymptote verticale à C_f à droite et à gauche en 2.

2.

a. $\Delta' : y = x+1$; $h(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$; $D_h = \Re\setminus\{1\}$

b.

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$

$\lim[h(x)-(x+1)] = \lim[\frac{x^2+3}{x-1}-(x+1)]$

$= \lim\frac{x^2+3-x^2+1}{x-1} = \lim\frac{4}{x-1} = 0$

De même : $\lim_{x\to+\infty}[h(x)-(x+1)] = 0$

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
Signe de h(x)-(x+1)	-	+
Pos° de (C_l) % D'	(C_l) se situe au dessous de D'	(C_l) se situe au dessus de D'

Donc la droite $\Delta' : y = x+1$ est une asymptote oblique à (C_1) au V($\pm\infty$).

c. $h(x)-(x+1) = \frac{4}{x-1}$

Exercice N° 3 : f : x → x^3-3x+2

1. f est une fonction polynôme donc elle est dérivable en tout réel a et on a : f'(a)=3a²-3.
2. a)Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse O.

(T) : y=f'(0)(x-0)+f(0)

y=-3x+2

b)f(x)-(-3x+2)=x^3-3x+2+3x-2=x^3

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
Signe de f(x)-(-3x+2)	- 0	+
Pos° de (C_f) % (T)	(C_f) se situe au dessous de (T)	(C_f) se situe au dessus de (T)

A(0,2)

3. a)Soit (T) la tangente à (C_f) au point d'abscisse x_0.

(T)//(D) ⇔ f'(x_0)=9 ⇔ $3x_0^2$-3=9 ⇔ x_0^2=4 ⇔ x_0=2ax_0=-2

Donc les points de (C) où la tangente est parallèle à (D) so : A(2 ;4) ; B(-2 ;0).

b) $(T)\perp(O,\vec{j}) \Leftrightarrow (T)//(O,\vec{i}) \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = 1 \quad or \quad x_0 = -1$

Donc les points de (C) où la tangente est perpendiculaire à l'axe des ordonnées sont C(1 ;0) et E(-1 ;4).

4. $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-4}{-2h} = -\frac{1}{2}\times\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-4}{h} = -\frac{1}{2}\times\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -\frac{1}{2}\times f'(2)$

$= -\frac{1}{2}\times9 = -\frac{9}{2}$

Exercice N° 4 : 1) $OA = 2\sqrt{2}$, on pose $\alpha \equiv (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OA}})[2\pi]$ et $\alpha \in]-\pi,\pi]$.

On a : $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ainsi les coordonnées polaires de A sont $\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

2) $OB = \sqrt{4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2-2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3} = 4$.

$dét(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 2+2\sqrt{3}-2+2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. $\cos(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA.OB} = \frac{1}{2}$ et

$\sin(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{dét(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB})}{OA.OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ainsi $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

$(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OB}}) \equiv (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{7\pi}{12}[2\pi]$ or $\frac{7\pi}{12} \in]-\pi,\pi]$ Donc les coordonnées polaires de B sont : $\left(2\sqrt{2},\frac{7\pi}{12}\right)$

3) $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Exercice N° 5 : x ∈ IR

I. $A = \cos(\pi+x).\sin(\frac{3\pi}{2}-x) - \sin(\pi-x).\cos(\frac{3\pi}{2}-x) = -\cos x.\sin(\frac{3\pi}{2}-x) - \sin x.\cos(\frac{3\pi}{2}-x)$

$= -[\cos x.\sin(\frac{3\pi}{2}-x) + \sin x.\cos(\frac{3\pi}{2}-x)] = -\sin(x+\frac{3\pi}{2}-x) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1$

$B = \sin(3\pi-x) + \sin(\frac{9\pi}{2}-x) + \cos(\frac{\pi}{2}+x) - \cos(2\pi-x) = \sin(\pi-x) + \sin(\frac{\pi}{2}-x).\sin x - \cos x$

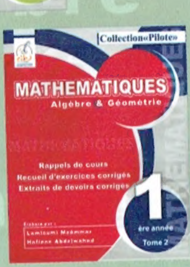
$= \sin x + \cos x - \sin x - \cos x = 0$

II-

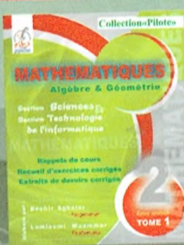
- $\sin\theta \le -\frac{1}{2}$ *et* $\theta \in]-\pi;\pi] \Rightarrow \theta \in [-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}]$; $S_{]-\pi;\pi]} = [-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}]$
- $\sin\theta \le -\frac{1}{2}$ *et* $\theta \in]0;2\pi] \Rightarrow \theta \in [\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}]$ *donc* $S_{]0;2\pi]} = [\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}]$

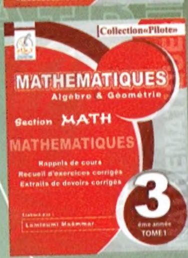
Collection«Pilote»

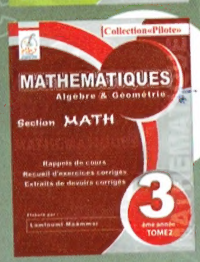




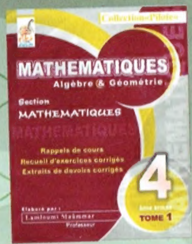


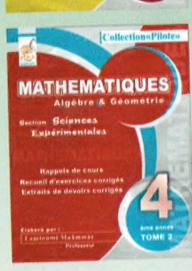
















ISBN: 978-9973-56-082-7

Depot légal: quatrieme trimestre 2009

8Dt500



نهج حشوز عمارة أنيس3000صفاقس
الهاتف 117 222 74 967 227 74
فاكس 855 200 74
الجوال 721 418 98 469 677 97

مطبعة التسفير الفني
الهاتف : 30 20 43 74 216

MATHEMATIQUES

A+B=C

Concept : Talent - 97 677 457